



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL
ESTADO DE HIDALGO



INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN TECNOLOGÍAS DE INFORMACIÓN Y SISTEMAS

INGENIERÍA EN ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES

***“Tribología en Robots Manipuladores: Fundamentos,
Efectos, Modelado y Simulación”***

Tesis para obtener el título de:

Ingeniería en Electrónica y Telecomunicaciones

Presenta:

*Horacio Daniel Bautista Vargas
Jonatan Sosa Franco*

Asesor de tesis:

Dr. Omar Arturo Domínguez Ramírez

Co-Asesores

M. en C. Jesús Patricio Ordaz Oliver
M. en C. Mayen Gicela Díaz Montiel

Pachuca de Soto, Hidalgo, Diciembre 2007.



Agradecimientos

Agradecemos profundamente a Dios, quien nos permitió ver culminada una etapa más en nuestra formación. Gracias a nuestra familia por su comprensión, atención, paciencia y apoyo, pues reconocemos que si no fuera por ellos esto no hubiera sido posible. De igual manera agradecemos a nuestro asesor y co-asesores quienes nos indicaron el camino a seguir, dándonos herramientas para poder dar forma a éste sueño que hoy se ve concluido.

Resumen.

En la industria hay elementos en movimiento donde la fricción y el desgaste están presentes en todo momento, para describir mejor este fenómeno existe una ciencia denominada tribología, una ciencia que tiene una gran importancia, principalmente en la optimización de los recursos, pero aplicada de una forma correcta ayuda a una mejor producción y reducción de costos en la industria.

La importancia de la tribología radica en las bondades que brinda al conocer y estimular la investigación de fricción, la lubricación y el desgaste que se produce en cada uno de los actuadores y en el robot mismo que se encarga de desempeñar distintas tareas programadas, haciendo que estos factores logren mermar la eficiencia y eficacia de producción en la industria.

Los pares y fuerzas de fricción están presentes en todos los sistemas mecánicos, y su adecuado funcionamiento ejerce una gran influencia, ya que es totalmente decisiva en el adecuado control del movimiento en cualquier sistema de esta índole, permitiendo determinar la fiabilidad, la vida útil y el uso efectivo de la energía y su aprovechamiento en la industria.

La tribología es una de las ciencias de mayor desarrollo en los últimos años, esto es demostrado por el aumento de estudios con respecto a años anteriores, debido a que por efectos de la fricción y el desgaste, es mayor la cantidad de energía requerida para que se puedan desempeñar las mismas tareas de los robots industriales.

Hoy en día es más factible calcular el desgaste y como los procesos para lograrlo se tornan más económicos y fáciles, dentro de algunos años esto será exigencia para las máquinas y sus elementos, incrementándose los métodos de control y las medidas preventivas. En un futuro también el desgaste, su control y su diagnóstico formarán parte de los sistemas de calidad.

La fricción es el objetivo fundamental del estudio de la tribología, los trabajos realizados hasta ahora, han aportado conocimientos importantes en el área de contacto y la adhesión, sin embargo no se ha logrado una teoría completamente elaborada, ya que a la fricción la envuelve un sin número de procesos complejos que son altamente difíciles de modelar y que residen principalmente en la superficie de contacto.

Esta tesis tiene como propósito dar a conocer los aspectos tribológicos clásicos que afectan el desempeño de un robot manipulador, para ello se discuten los fundamentos matemáticos presentes en el fenómeno de fricción, analizando efectos e influencias de este fenómeno, se muestra la influencia de la fricción en el desempeño de un robot manipulador a partir de los diferentes modelos existentes en el estado del arte. Se presentan resultados a nivel simulación de identificación de fricción en un actuador típico de un robot manipulador, este estudio permite obtener resultados altamente confiables del comportamiento de la fricción, efectos e influencias en un robot, evaluando en un robot de dos grados de libertad (robot R2GL).

Tabla de contenido

Agradecimientos.....	i
Resumen.....	ii
Tabla de contenido.....	iii
Lista de figuras.....	v
Acrónimos y abreviaturas.....	viii

1. Introducción.

1.1 Objetivo general.....	1
1.2 Objetivos específicos.....	1
1.3 Antecedentes.....	1
1.4 Justificación.....	3
1.5 Planteamiento del problema.....	3
1.6 Solución propuesta.....	4
1.7 Metodología.....	4
1.8 Contribución de la tesis.....	5
1.9 Organización de la tesis.....	5

2. La tribología en los sistemas electromecánicos.

2.1 Introducción.....	7
2.2 Breve descripción del estado del arte.....	8
2.3 Conceptos preliminares de fricción.....	11
2.3.1 Fricción.....	11
2.3.2 Fricción seca o de Coulomb.....	12
2.3.3 Fricción viscosa o dinámica.....	13
2.3.4 Fenómeno de fricción estática.....	15
2.4 Modelos de fricción.....	16
2.4.1 Modelo de fricción de Karnopp.....	20
2.4.2 Modelo de fricción de Armstrong.....	21
2.4.3 Modelo de fricción de Dahl.....	23
2.4.4 Modelo de la cerda.....	24
2.4.5 Modelo integrador de reajuste.....	25
2.4.6 Modelo de fricción de Bliman y Sorine.....	26
2.4.7 Modelo de fricción para contactos lubricados.....	27
2.4.8 Modelo de fricción de LuGre.....	28
2.4.9 Modelo de fricción GSM.....	30
2.5 Modelo dinámico de un robot manipulador.....	31

2.5.1. Propiedades dinámicas del robot de estudio.....	35
2.6 Modelo matemático del robot R2GL.....	37
2.7 Influencia de la fricción en un robot manipulador.....	42
2.8 Conclusiones.....	43

3. Modelos de fricción en un sistema masa-resorte.

3.1 Introducción.....	44
3.2 Sistema masa-resorte con diferentes modelos de fricción.....	45
3.3 Conclusiones.....	57

4. Modelos de fricción en un robot de dos grados de libertad.

4.1 Introducción.....	58
4.2 Formulación Euler-Lagrange.....	58
4.3 Configuración del robot de dos grados de libertad.....	58
4.4 Evaluación de los modelos de fricción.....	61
4.5 Conclusiones.....	77

5. Conclusiones, trabajo futuro y perspectivas

5.1 Conclusiones generales.....	78
5.2 Trabajo futuro.....	79
5.3 Perspectivas.....	80

Glosario de términos.....	81
Apéndice A “Programas de simulación del modelo masa-resorte”.....	84
Apéndice B “Programas de simulación del R2GL”.....	91
Bibliografía.....	117

Lista de Figuras

(2.1)	Gráfica de fricción estática y dinámica [19].	11
(2.2)	Modelo de fricción de Coulomb	12
(2.3)	Gráfica de fricción viscosa	14
(2.4)	Gráfica de la fuerza de fricción estática	15
(2.5)	Lazo de histéresis entre fricción y velocidad	17
(2.6)	Ejemplos de modelos de fricción estática.	17
(2.7)	Modelo de fricción viscosa y fricción de Coulomb	19
(2.8)	Modelo de fricción viscosa, fricción de Coulomb, con el efecto Stribeck	20
(2.9)	Fuerza de fricción como una función de desplazamiento para el modelo de Dahl	23
(2.10)	Conexión paralela de un modelo de estado elemental de fricción	31
(2.11)	Diagrama de un robot manipulador de 2 grados de libertad	37
(3.1)	Sistema masa-resorte	44
(3.2)	Simulación de la posición con fricción viscosa.	46
(3.3)	Simulación de la velocidad con fricción viscosa.	46
(3.4)	Simulación del modelo de fricción viscosa.	46
(3.5)	Función signo	47
(3.6)	Tangente hiperbólica	47
(3.7)	Simulación de la posición con fricción de Coulomb.	48
(3.8)	Simulación de la velocidad con fricción de Coulomb.	48
(3.9)	Simulación del modelo de fricción de Coulomb.	48
(3.10)	Simulación de posición con fricción viscosa y Coulomb.	49
(3.11)	Simulación de velocidad con fricción viscosa y Coulomb.	49
(3.12)	Simulación del modelo de fricción viscosa y de Coulomb	49
(3.13)	Comportamiento de la función exponencial cuando $x=n$ par	50
(3.14)	Comportamiento de la función exponencial cuando $x=n$ impar	50
(3.15)	Simulación de la posición con el efecto Stribeck.	51
(3.16)	Simulación de la velocidad con el efecto Stribeck.	51
(3.17)	Simulación del efecto Stribeck.	51
(3.18)	Simulación de la posición con fricción de Dahl.	52
(3.19)	Simulación de la velocidad con fricción de Dahl.	52
(3.20)	Simulación de la fricción de Dahl.	53
(3.21)	Simulación de la posición con fricción de Luge.	54
(3.22)	Simulación de la velocidad con fricción de Luge.	54
(3.23)	Promedio de deflexión de las cerdas	54

(3.24)	Simulación de la fricción de Lugre.	54
(3.25)	Simulación de la posición con fricción de Maxwell.	56
(3.26)	Simulación de la velocidad con fricción de Maxwell.	56
(3.27)	Simulación de la fricción de Maxwell.	56
(4.1)	Condición inicial del robot R2GL.	59
(4.2)	Condición inicial más un incremento angular.	59
(4.3)	Primer movimiento de los eslabones.	60
(4.4)	Segundo movimiento de los eslabones.	60
(4.5)	Movimiento pendular.	60
(4.6)	Estabilidad del robot.	61
(4.7)	Simulación de posición con fricción viscosa primer eslabón	62
(4.8)	Simulación de velocidad con fricción viscosa primer eslabón	62
(4.9)	Simulación de la fricción viscosa primer actuador.	63
(4.10)	Simulación de posición con fricción viscosa segundo eslabón.	63
(4.11)	Simulación de velocidad con fricción viscosa en segundo eslabón.	63
(4.12)	Simulación de fricción viscosa en el segundo actuador.	63
(4.13)	Simulación de posición con fricción de Coulomb	64
(4.14)	Simulación de posición con fricción de Coulomb primer eslabón.	64
(4.15)	Simulación de fricción de Coulomb en el primer actuador.	65
(4.16)	Simulación de posición con fricción de Coulomb segundo eslabón.	65
(4.17)	Simulación de velocidad con fricción de Coulomb segundo eslabón.	65
(4.18)	Simulación de fricción de Coulomb en el segundo actuador.	65
(4.19)	Simulación de posición con fricción viscosa y Coulomb primer eslabón	66
(4.20)	Simulación de velocidad con fricción viscosa y Coulomb primer eslabón	66
(4.21)	Simulación de fricción viscosa y Coulomb primer actuador	67
(4.22)	Simulación de posición con fricción viscosa y Coulomb segundo eslabón.	67
(4.23)	Simulación de velocidad con fricción viscosa y Coulomb segundo eslabón	67
(4.24)	Simulación de fricción viscosa y Coulomb segundo actuador.	68
(4.25)	Simulación de posición con el efecto Stribeck primer eslabón.	69
(4.26)	Simulación de velocidad con el efecto Stribeck primer eslabón.	69
(4.27)	Simulación del efecto Stribeck primer actuador.	69
(4.28)	Simulación de posición con el efecto Stribeck segundo eslabón.	69
(4.29)	Simulación de velocidad con el efecto Stribeck segundo eslabón.	69
(4.30)	Simulación del efecto Stribeck segundo actuador.	70
(4.31)	Simulación de posición con fricción de Lugre primer eslabón.	71
(4.32)	Simulación de velocidad con fricción de Lugre primer eslabón.	71
(4.33)	Promedio de deflexión de las cerdas en el primer actuador	71
(4.34)	Simulación de la fricción de Lugre primer actuador.	71
(4.35)	Simulación de posición con fricción de Lugre segundo eslabón.	72
(4.36)	Simulación de velocidad con fricción de Lugre primer eslabón.	72
(4.37)	Promedio de deflexión de las cerdas segundo actuador	72
(4.38)	Simulación de la fricción de Lugre segundo actuador.	72
(4.39)	Simulación de posición con fricción de Dahl primer eslabón.	73
(4.40)	Simulación de velocidad con fricción de Dahl primer eslabón.	73
(4.41)	Simulación de la fricción de Dahl primer actuador.	73
(4.42)	Simulación de posición con fricción de Dahl segundo eslabón	74
(4.43)	Simulación de velocidad con fricción de Dahl segundo eslabón.	74

(4.44)	Simulación de la fricción de Dahl segundo actuador.	74
(4.45)	Simulación de posición con fricción de Maxwell en primer eslabón.	75
(4.46)	Simulación de velocidad con fricción de Maxwell en primer eslabón.	75
(4.47)	Simulación de la fricción de Maxwell primer actuador.	76
(4.48)	Simulación de posición con fricción de Maxwell en segundo eslabón.	76
(4.49)	Simulación de velocidad con fricción de Maxwell en segundo eslabón.	76
(4.50)	Simulación de la fricción de Maxwell segundo actuador.	76
(5.1)	Robot experimental R2GL.	80

Acrónimos y abreviaturas.

A continuación se presenta una lista de acrónimos utilizados en este trabajo.

Notación	Descripción
R2GL	Robot de 2 grados de libertad
gdl	Grados de libertad
GSM	Generalized Maxwell_slip Model (Modelo generalizado de Maxwell_slip)
seg	Segundos
L_1	Longitud del eslabón 1 del R2GL
L_2	Longitud del eslabón 2 del R2GL
m_1	Masa del eslabón 1
m_2	Masa del eslabón 2
x_1	Posición del eslabón 1 en el eje x
y_1	Posición del eslabón 1 en el eje y
θ_1	Ángulo del primer eslabón con respecto al eje x
θ_2	Ángulo del segundo eslabón con respecto al primer eslabón
s_1	Seno del ángulo del primer eslabón.
s_2	Seno del ángulo del

	Segundo eslabón.
c_1	Coseno del ángulo del primer eslabón.
c_2	Coseno del ángulo del segundo eslabón.
K_1	Energía cinética del primer eslabón.
K_2	Energía cinética del segundo eslabón.
P_1	Energía potencial del primer eslabón.
P_2	Energía potencial del segundo eslabón.
LCG_1	Longitud al centro de gravedad del eslabón 1.
LCG_2	Longitud al centro de gravedad del eslabón 2.
L	Lagrangiano

Capítulo 1

Introducción

1.1 Objetivos de la tesis

1.1.1 Objetivo general

Determinar los efectos e influencia de la fricción en robots manipuladores, aplicando los distintos modelos de fricción existentes, a nivel simulación.

1.1.2 Objetivos específicos

1. Estudiar los diferentes fenómenos de fricción inherentes a los sistemas electromecánicos.
2. Realizar un breve estudio del estado del arte de tribología en robots manipuladores.
3. Realizar simulaciones de fricción para un modelo masa-resorte.
4. Implementar en simulación distintos modelos de fricción en un robot planar de dos grados de libertad.
5. Obtener las influencias de la fricción en un robot planar de dos grados de libertad, a través de la simulación de los distintos modelos de fricción.

1.2 Antecedentes

Los fenómenos de fricción son propiedades dinámicas existentes en todo sistema electromecánico, tal es el caso de las articulaciones de un robot manipulador. La fricción, entre otras cosas, depende de la velocidad articular o lineal de dos cuerpos en contacto directo o a través de un lubricante. Para el caso de las articulaciones de revolución depende de la velocidad angular, cuando la articulación es prismática depende de la velocidad tangencial. La fricción, al ser un fenómeno inherente a la dinámica de un robot afecta su desempeño, propiciando oscilaciones, inestabilidad, par articular excesivo, mala regulación del robot a una región local de su espacio de trabajo, errores de seguimiento, desgastes en transmisiones mecánicas y sólidos en contacto.

Existen tres tipos de fricción en las articulaciones de un robot, que se han considerado como clásicos, estos son:

1. La fricción viscosa o dinámica.
2. La fricción seca o de Coulomb.
3. La fricción estática.

En el primer caso esta depende linealmente de la velocidad articular, sin embargo para el segundo caso la fricción depende del signo de la velocidad articular.

A partir de esto se han descrito diferentes modelos de fricción, tal es el caso de:

1. Modelo de fricción viscosa-Coulomb.
2. Modelo de fricción de Karnopp.
3. Modelo de fricción de Armstrong.
4. Modelo de fricción de Dahl.
5. Modelo de la cerda.
6. Modelo integrador de reajuste.
7. Modelo de fricción de Bliman y Sorine.
8. Modelo de fricción de LuGre.
9. Modelo de fricción GSM.

En ellos son considerados diferentes desempeños relativos a la velocidad articular a partir de una condición inicial cero, aspectos que se discuten en esta tesis.

Los modelos de fricción previamente mencionados requieren del conocimiento de los coeficientes de fricción viscosa, seca y estática, parámetros que generalmente son desconocidos en un sistema electromecánico como un robot manipulador.

Estos modelos de fricción han sido desarrollados con el propósito de obtener un modelo que involucre todas las propiedades dinámicas propias de las fuerzas de fricción, sin embargo una teoría completamente sólida aún no ha sido obtenida.

El conocer los modelos matemáticos de la fricción y sus parámetros, representa un valor en la acción de control para el robot durante el desempeño de una tarea, dado que es posible atenuar la influencia de la fricción durante la ejecución de la tarea, y aminorar los efectos y la influencia, además de propiciar un ahorro en la energía requerida por el robot para el desempeño de su tarea. De igual forma es posible incrementar de manera importante el desempeño en aplicaciones micrométricas, ya que en la actualidad, la industria exige un menor margen de error en la producción, y mayor exactitud en las tareas que realizan los robots, como por ejemplo, la producción de piezas mecánicas.

1.3 Justificación

En la actualidad el fenómeno no lineal de la fricción no ha sido considerado de manera importante en la gran mayoría de los sistemas electromecánicos, que en el peor de los casos son modelados con base en un sistema de ecuaciones diferenciales lineales, modelos clásicos discutidos en la gran mayoría de la bibliografía clásica de modelado y control de sistemas dinámicos. Sin embargo existen trabajos actuales en revistas indizadas de prestigio internacional que discuten los modelos no lineales, la influencia y en algunos casos las técnicas de identificación paramétrica.

Los trabajos de identificación de los parámetros de fricción viscosa y seca, son publicados exclusivamente para actuadores empleados como servomotores en sistemas electromecánicos en lazo cerrado, sin embargo no hay trabajos discutidos de manera explícita para robots manipuladores, situación que se aborda en este trabajo profesional.

1.4 Planteamiento del problema

Los robots manipuladores son:

1. Modelados con sistemas altamente no lineales.
2. El modelo del robot es útil como parte de su diseño.
3. La ley de control de movimiento para un robot manipulador es definida a partir del modelo dinámico.
4. La ley de control puede o no depender del modelo y en algunos casos de su estructura.

Por lo tanto modelo dinámico de un robot manipulador es excesivamente útil para su diseño y su control. La dinámica de un robot manipulador tiene los siguientes fenómenos dinámicos:

1. Fuerzas inerciales.
2. Fuerzas de Coriolis.
3. Fuerzas centrípetas
4. Fuerzas gravitacionales
5. Fuerzas de fricción

La dinámica del robot, en los puntos 1, 2, 3 y 4, es determinada mediante la formulación clásica de Euler-Lagrange, que permiten el cálculo del modelo sin fricción a partir del balance de energías cinética y potencial que rigen el desempeño del robot, conocido como Lagrangiano.

Por tal motivo los fenómenos tribológicos que intervienen no son definidos en esta metodología, sin embargo son inherentes a la dinámica obtenida con ella y nada despreciables, por tanto es de vital importancia determinar los efectos e influencia que tienen las fuerzas de fricción en un robot manipulador.

El vector de fuerzas de fricción es importante para definir un modelo dinámico más preciso, y en consecuencia un diseño del robot y de su ley de control más eficaz.

1.5 Solución propuesta

En esta tesis se propone determinar el modelo dinámico de un robot manipulador considerando al vector de fuerzas de fricción, empleando los modelos discutidos en los antecedentes de esta tesis. Para ello se realizan simulaciones con los distintos modelos de fricción, estableciendo parámetros de fricción articular en un robot planar de dos grados de libertad, que indiquen la influencia y efectos que propician. Se propone, para efectuar la tarea a desarrollar en este estudio sobre fricción, aplicar los modelos de fricción un modelo simple, tal como un sistema masa-resorte, y posteriormente hacer su aplicación a un robot planar de dos grados de libertad, sustituyendo el vector de fuerzas de fricción por los principales modelos de fricción que existen, para ello conociendo las masas y longitudes del robot es posible determinar las constantes de fricción viscosa y seca, mismas que serán empleadas por los modelos de fricción, de tal manera que se obtengan resultados de simulación sobre las influencias que tiene la fricción en un robot manipulador de dos grados de libertad.

1.6 Metodología

Metodología para la obtención de las influencias de los fenómenos de fricción en un robot manipulador de dos grados de libertad.

1. Recopilar información sobre los distintos modelos de fricción existentes, así mismo comprender su desarrollo matemático.
2. Despejar del sistema masa-resorte el término de fricción que afecta a este tipo de sistemas.
3. Aplicar los principales modelos de fricción en un sistema masa-resorte, sustituyendo estos modelos en el término de fricción del sistema, obteniendo influencias de la fricción a través de una serie de simulaciones para obtener dicho resultado.
4. Despejar del modelo dinámico del robot los términos de fricción, para poder realizar el mismo experimento que en 3 y de esa manera obtener las influencias de la fricción en un robot manipulador de dos grados de libertad.

5. Instrumentar el resultado de la componente de fricción a nivel simulación para ambas articulaciones.
6. Realizar el experimento con el robot R2GL, dejándolo en una condición inicial que permita someterlo a fuerzas gravitatorias, para que llegue a un punto de equilibrio estable, monitoreando el comportamiento de la fricción durante el experimento.
7. Determinar a través del experimento propuesto las influencias y efectos de la fricción en el R2GL, para concluir de acuerdo a los principales modelos de fricción, tales como la fricción compleja de D' Luge o la fricción basada en el modelo Dahl y el modelo GSM, la existencia de fenómenos tribológicos a nivel simulación.

1.7 Contribución de la tesis

Las contribuciones de este trabajo de investigación se muestran a continuación:

- Comprobación de fenómenos tribológicos en sistemas mecánicos.
- Aplicación de modelos de fricción a un sistema masa-resorte, para determinar influencias de la fricción en este tipo de sistemas.
- Implementación de los principales modelos de fricción en la dinámica propia de un robot manipulador de dos grados de libertad.
- Determinación de las influencias de las fuerzas de fricción en un robot manipulador de dos grados de libertad.
- Evaluación de las influencias y efectos del fenómeno de fricción y obtención de resultados a nivel simulación.

1.8 Organización de la tesis

Este trabajo de investigación se encuentra dividido en cinco capítulos, dos apéndices, glosario y referencias bibliográficas. En cada capítulo se inicia con una breve introducción y conclusiones al término del mismo.

En el Capítulo 1 se presentan un breve resumen del contenido del trabajo de investigación, los objetivos, antecedentes, planteamiento del problema, una justificación del trabajo, así mismo una solución propuesta.

En el Capítulo 2 se dan a conocer las principales generalidades de los fenómenos tribológicos y los diferentes componentes de esta ciencia, principalmente la fricción y los

distintos modelos de fricción existentes, así como las propiedades dinámicas de un robot manipulador de dos grados de libertad y modelado por medio de Euler-Lagrange.

En el Capítulo 3 se describe el sistema masa-resorte y se presentan diversas simulaciones del sistema de acuerdo a los principales modelos de fricción, presentando las influencias de la fricción en este tipo de sistemas.

En el Capítulo 4 se propone despejar del modelo dinámico del robot manipulador de dos grados de libertad las fuerzas de fricción, y sustituirlo por los principales modelos de fricción, para determinar mediante simulaciones la influencia de la fricción y sus efectos en el R2GL, para ello se realiza un bosquejo del robot de una forma general.

El Capítulo 5 reúne las conclusiones generales de esta tesis y describe las perspectivas y bases generales para trabajos futuros.

Se constituyó un glosario organizado léxico-gráficamente y debidamente referenciado, con el propósito de situar al lector de este trabajo en el contexto de la robótica y en particular de los temas tratados en esta tesis.

Se incluyen las referencias consultadas a las que se da crédito oportuno a lo largo de esta tesis. Se presentan dos apéndices que dan a conocer los programas de simulación utilizados para obtener los resultados presentados en el trabajo, tanto del sistema masa-resorte, como del R2GL.

Capítulo 2

La tribología en los sistemas electromecánicos.

2.1 Introducción

El concepto de “tribología” fue usado por primera vez en un informe elaborado por la Comisión del Ministerio de Educación y Ciencia de la Gran Bretaña el 9 de marzo de 1966, hace exactamente 41 años, por lo que esta fecha se reconoce como la del nacimiento de la tribología como una nueva disciplina científica [1].

Desde el nacimiento de la tribología, ésta comenzó a adquirir una gran relevancia como disciplina, debido a que gracias a ésta es posible optimizar y economizar recursos, materia prima y materiales energéticos, siendo estos últimos los de mayor importancia, debido a que logrando un adecuado estudio de la fricción y su identificación, se puede lograr una compensación de los efectos que esta produce, de la misma manera obtendremos como resultado un ahorro de energía, lo cual nos llevará a lograr los objetivos establecidos y gozar de múltiples beneficios. Así mismo en muchos países gracias a su carácter interdisciplinario y sus múltiples aplicaciones en una gran variedad de ciencias, su estudio ha sido trascendental y con un gran interés mostrado por diversas ciencias.

Gracias al carácter multidisciplinario al que se hace mención, podemos encontrar que las disciplinas mayormente relacionadas con la tribología son la física, por la aplicación de esta ciencia con respecto al movimiento que se ejerce entre dos cuerpos, ya que es ahí donde comienza el fenómeno denominado fricción; con la química, ya que esta ciencia se encarga de aportar al fenómeno un estudio más preciso que se realiza a nivel molecular; la metalurgia, debido a que en la industria y en la robótica se consideran mayormente metales en constante rozamiento, lo cual produce fricción y desgaste; la ciencia de los materiales, para un mayor entendimiento del comportamiento de los distintos materiales que componen los distintos equipos en la industria, y de los cuales es esencial conocer cuál es el tiempo de vida que se calcula, para posteriormente compensando la fricción, llegar a aumentar este periodo funcional de las máquinas; y entre muchas otras disciplinas que se relacionan con la tribología.

Existe un gran apoyo en la economía, las matemáticas y la computación como base para los estudios que se han realizado y que conocemos hasta el día de hoy, la tribología tiene principalmente el propósito de realizar investigaciones en la fricción, la lubricación y

el desgaste en los sistemas electromecánicos. La relevancia que ha llegado a tener esta ciencia es tal que se ha convertido en una de las disciplinas de mayor crecimiento en las últimas décadas, para muestra de esto tan solo basta con observar el enorme incremento de cátedras universitarias y estudios de diversos investigadores y el interés que han puesto para lograr nuevos conocimientos en esta área, además las recomendaciones y medidas aplicadas por varios gobiernos de países desarrollados, las cuales engloban la formación de cuadros, desarrollos de investigaciones, introducción tecnológica de resultados y creación de centros especializados, todo esto para lograr ahorros energéticos para sus países.

Varios expertos consideran que en 1978, en Norteamérica, solo por efecto de la fricción y el desgaste se gastó de energía una cantidad equivalente a la necesaria para mantener a la ciudad de Nueva York durante un año. Estas pérdidas alcanzaron el valor de 20 MM USD, considerando el precio de barril de petróleo en 30 USD. En la industria de construcción de maquinaria se estima que, entre el desgaste y la fatiga se produce el 95% de las causas de salida de servicio de los elementos de máquina, no considerando aquí, aquellos que estando desgastados continúan trabajando y son causa de pérdida de eficiencia en mecanismos y máquinas [1].

Los datos presentados son datos contundentes de la relevancia que tiene el estudio de la tribología en la industria, y de la importancia de tener un fundamento sólido que nos ayude y facilite la identificación de fricción, el desgaste y lubricación de los sistemas electromecánicos, para permitir una predicción acertada de los efectos que esto conlleva. Se debe tomar en cuenta que es posible atenuar estos efectos, pero no existe la posibilidad de eliminarlos, ya que la fricción es un fenómeno físico inevitable.

2.2 Breve descripción del estado del arte

Para diversos tipos de sistemas electromecánicos se han aplicado distintos algoritmos para la identificación de fricción, de los cuales ahondaremos en esta breve descripción del estado del arte, esto para tener un panorama más amplio de la importancia que tiene el desarrollo de nuevos y mejores algoritmos dedicados a estudiar la fricción y los efectos que esta tiene en los diversos sistemas electromecánicos.

El primer modelo de fricción fue un modelo elaborado por Leonardo Da Vinci (1452-1519), un modelo clásico de fricción, realizando este modelo para la fricción estática, modelo en el cual sostuvo que la fuerza de fricción es proporcional a la carga, además de ser opuesta a la dirección del movimiento y que es independiente del área de contacto [14].

Para el año de 1785 Coulomb desarrollo un modelo, en el cual describió el fenómeno de fricción, describiendo un modelo inicial, que tiempo después se convirtió para ser conocido como fricción de Coulomb [14].

Hoy en día es más factible calcular el desgaste y como los procesos para lograrlo se tornan más económicos y fáciles, pero se estima que en los próximos años, los estudios sobre tribología tomarán mayor relevancia en una búsqueda por optimizar recursos en las industrias y lograr tantos ahorros como sea posible, sin sacrificar la calidad de la producción.

La fricción es el objetivo fundamental de estudio en la tribología, debido a que es el factor más importante en el desgaste de materiales, los cuales son afectados por distintos tipos de fricción [1]. Los trabajos hasta ahora desarrollados han aportado conocimientos importantes en el área real de contacto, la adhesión y el surcado; aunque hasta la fecha no se ha logrado el desarrollo de una teoría completamente elaborada.

La fricción ocurre en todos los sistemas mecánicos existentes, como lo son por ejemplo transmisiones, cilindros neumáticos, cilindros hidráulicos, válvulas, robots, etcétera.

El problema fundamental reside en que la fricción depende de un sin número de procesos complejos en la superficie de contacto. Muchos trabajos actuales están dirigidos a estudiar la topografía y la superficie de contacto, así como el cálculo del área real de contacto. Sin embargo, un método experimental efectivo para ello aún no ha sido elaborado [1].

En los últimos años se establecieron muchos mecanismos y procesos de desgaste, tales como el adhesivo, el abrasivo, el de fatiga, el de corrosión, y el de separación o desprendido por capas. La mayoría de estos mecanismos han sido confirmados por ensayos de laboratorio; pero, el área o región donde cada uno se produce no ha sido totalmente definida [1].

En el modelado de los procesos tribológicos ha habido avances importantes, sobre todo, en lo que a lubricación hidrodinámica se refiere. Mucho más atrasada está la modelación en los modelos comunes de fricción, lubricación límite y desgaste. Esto se debe a lo complejo de la interacción en la superficie de contacto y para ello hay que acometer en esto el trabajo en forma multidisciplinaria [1].

A pesar de lo complejo que es el modelado del fenómeno de fricción existen bastantes investigadores preocupados por obtener un modelo de fricción que permita una mejor medición de este fenómeno en los distintos actuadores que componen a un robot, para lograr de esta manera conocer las influencias que conlleva la fricción, tales como el desgaste de los materiales.

La fricción viscosa y la fricción de Coulomb son en gran medida los componentes más populares en los modelos de fricción utilizados para el control de sistemas mecánicos. Ambas producen fuerzas contra el movimiento relativo entre los cuerpos en contacto, pero la fricción viscosa es proporcional a la velocidad, mientras la fricción de Coulomb depende del signo de velocidad. Estos componentes de fricción son algunas de las mayores

limitaciones en el funcionamiento de sistemas de alta precisión en posicionamiento y movimiento de mecanismos [2].

Modelos más elaborados incorporan además de la fricción viscosa y de Coulomb también el efecto Stribeck, para una mejor captura del comportamiento del movimiento a bajas velocidades [15].

Existen también los modelos dinámicos de la fricción donde la fuerza real de la fricción o el esfuerzo de torsión es una función de la velocidad instantánea pero también del comportamiento previo.

Dentro de la clase de los modelos dinámicos, podemos encontrar el modelo propuesto por LuGre, modelo en el cual se describen los efectos de la fricción viscosa y de Coulomb, pero también un comportamiento más complejo de la fricción, en el cual envuelve otros efectos como el movimiento de rozamiento y deslizamiento, el pre-deslizamiento, también los efectos de Dahl y de Stribeck, y un retraso friccional [2].

Otro modelo dinámico para fricción fue el propuesto en marzo del año de 1995, la cual es referenciada en [2]. El modelo propuesto captura la mayor parte del comportamiento de la fricción que ha sido observado experimentalmente. Este modelo propuesto captura también el efecto Stribeck, histéresis, un procedimiento de medida de fricción, características para el fenómeno de *stiction*, y variación de la fuerza disipativa. Algunas de las propiedades para el diseño del control son investigadas mediante un análisis y simulación. En este modelo propuesto se proponen estrategias de control, incluyendo un observador de fricción, en este trabajo de investigación se presentan resultados de estabilidad.

Otra publicación en este mismo sentido fue hecha en el mes de agosto del año 2000, la cual se muestra en [2], en la cual se presenta un procedimiento para la medida de fricción, el cual incluye fricción viscosa y de Coulomb, este procedimiento realiza la medición de fricción para sistemas mecánicos equipados de sensores de alta precisión de la velocidad. El método propuesto en esta publicación explota la estructura de la respuesta de la velocidad predicha por varios modelos estándar que modelan fricción cuando se aplica una entrada en forma de rampa directamente a un torque, presentando resultados experimentales que demuestran alta exactitud del procedimiento propuesto [2].

El estudio de la fricción y el esfuerzo por encontrar un modelo que logre satisfacer de una forma adecuada el modelado de fricción, es cada vez mayor, debido a que es de gran importancia el conocer todas las influencias que trae consigo este fenómeno en todo sistema mecánico. Múltiples estudios para la medición de fricción que se han llevado a cabo presentan resultados satisfactorios para obtener valores reales de fricción y llevar a cabo una correcta compensación del fenómeno, y se espera que por el gran crecimiento que se observa en este tipo de estudios, en un futuro tenga un auge aún mayor.

2.3 Conceptos preliminares de fricción

2.3.1 Fricción

Todo sistema mecánico de alta precisión es intrínsecamente afectado por fricción cuando existen cuerpos en contacto, la fricción es un fenómeno físico inevitable presente en los mecanismos y produce comportamientos indeseables en sistemas de control tales como errores de colocación y de seguimiento, y el límite completa un ciclo.

Cuando una superficie se coloca sobre otra, es necesario aplicar una fuerza horizontal finita para iniciar el deslizamiento. Esta fuerza horizontal es la fricción estática entre las dos superficies cuya magnitud depende, entre otras cosas, de la limpieza de la interfase, de tal modo que la fricción entre dos cuerpos es alta en el vacío.

La fuerza necesaria para mantener el deslizamiento debe ser mayor que la fricción cinética entre las dos superficies. La resistencia al deslizamiento bajo tracción tangencial se explicó durante mucho tiempo mediante la hipótesis de la rugosidad que sugiere que las crestas de una superficie descansan sobre los valles de la otra y la resistencia al movimiento es el esfuerzo que deben realizar estas crestas para salir de los valles. La teoría actual de fricción parte de la premisa básica de que el contacto ocurre en unos cuantos puntos aislados debido a la naturaleza ondulatoria de las superficies. Las áreas de contacto forman uniones metálicas debido a la deformación plástica o elástica, de manera que la resistencia friccional es la fuerza necesaria para destruir estas uniones [4].

La fricción también puede ser definida como la fuerza de reacción tangencial entre dos superficies en contacto. Físicamente esas fuerzas de reacción son los resultados de muchos mecanismos diferentes, los cuales dependen de la geometría de contacto y la topología, propiedades del peso y superficie del material de los cuerpos, el desplazamiento y la velocidad relativa de los cuerpos y la presencia de lubricación [3].

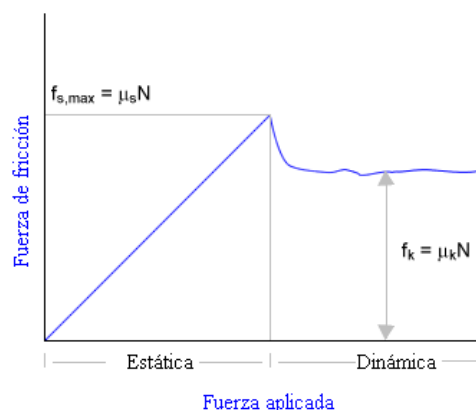


Fig. 2.1. Gráfica de fricción estática y dinámica [19].

En la gráfica 2.1 se muestran los dos principales tipos de fricción, estática y dinámica, donde la magnitud de la fricción estática está dada por $f_{s, \max} = \mu_s N$, donde f_s es la fuerza de fricción estática, μ_s es el coeficiente de fricción estática, y N es la fuerza normal, y la magnitud de la fricción dinámica está dada por $f_k = \mu_k N$, donde f_k , es la fuerza de fricción dinámica, μ_k el coeficiente de fricción dinámica y N la fuerza normal.

En contactos secos que se deslizan a través de superficies planas, la fuerza de fricción puede ser modelada como una deformación elástica y plástica de las asperezas microscópicas en contacto [3].

2.3.2 Fricción seca o de Coulomb

La teoría de fricción seca, o fricción de Coulomb, define las fuerzas de fricción máximas que pueden ser ejercidas por superficies secas en contacto, y que se hallan en reposo entre sí. También define las fuerzas de fricción ejercidas por las superficies cuando estas se hallan en movimiento relativo, es decir, deslizándose unas con respecto de las otras [5].

Más a futuro, para ser preciso en el año de 1975, Coulomb desarrolló este modelo y el fenómeno de fricción descrito por el modelo, el modelo se convirtió para ser conocido como fricción de Coulomb. El modelo es representado en la siguiente figura (2.2).

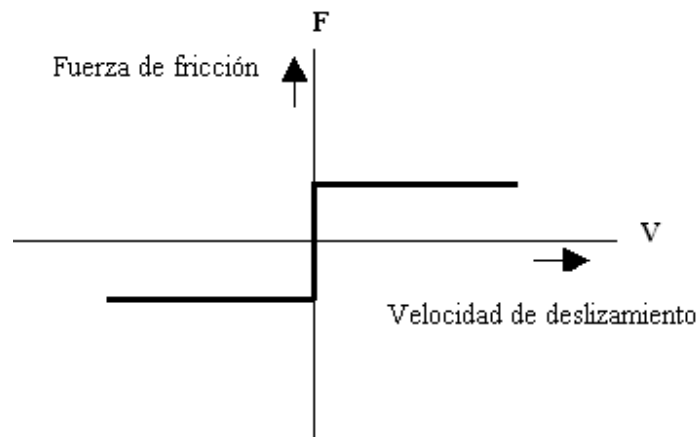


Fig. 2.2. Modelo de fricción de Coulomb [14].

En el modelo de fricción de Coulomb la fuerza de fricción puede ser descrita como:

$$F_c = Fn\mu_s \operatorname{sgn}(v) \quad (2.1)$$

Donde F es la fuerza de fricción, F_n es la fuerza normal, μ_s es el coeficiente de fricción de Coulomb, sgn es la función signo y v es la velocidad. El modelo de fricción de

Coulomb es, debido a su simplicidad, usado muy a menudo. En muchos textos es además referido como una fricción dinámica y μ_s descrita como un coeficiente de fricción dinámica.

El coeficiente estático.

La magnitud de la fuerza de fricción máxima que se puede ejercer entre dos superficies planas secas en contacto es:

$$f_e = \mu_s N \quad (2.2)$$

Donde:

f_e = Fuerza de fricción estática.

N= Componente normal de la fuerza.

μ_s = Coeficiente de fricción estática (constante).

El coeficiente cinético

Según la teoría de la fricción seca, la magnitud de la fuerza de fricción entre las dos superficies planas y secas en contacto, que están en movimiento (deslizamiento) relativo es:

$$f_c = \mu_k N \quad (2.3)$$

Donde:

f_c = Fuerza de fricción cinética.

N= Componente normal de la fuerza.

μ_k = Coeficiente de fricción dinámica (constante).

2.3.3 Fricción viscosa o dinámica

La fricción dinámica ocurre cuando dos objetos están moviéndose relativamente uno con otro y se frotan juntos, por ejemplo un trineo en el suelo. El coeficiente de *fricción dinámica* es típicamente denotada por μ_k , y es usualmente menor que el coeficiente de fricción estática. Desde el punto de vista matemático, sin embargo, la diferencia entre fricción estática y dinámica es de menor importancia; permitiéndonos tener un coeficiente de fricción el cual depende de una velocidad de deslizamiento y es tal que su valor es cero, es el límite de la fricción dinámica μ_k para la velocidad tendiendo a cero. Entonces una solución del problema de contacto con tal fricción de Coulomb, resuelve además el

problema con el valor original de μ_k y cualquier fricción estática más grande que ese límite.

Puesto que se ejerce la fricción en una dirección que es opuesta al movimiento, la fricción dinámica usualmente hace un trabajo negativo, típicamente retardándolo hacia abajo. Sin embargo existen algunas excepciones, si la misma superficie esta bajo aceleración. Uno puede ver esto colocando una caja pesada sobre una manta, entonces empujándola sobre la manta rápidamente. En este caso, la caja resbala al revés de la manta, pero el movimiento es al frente del piso. Así, la fricción dinámica entre la caja y la manta acelera la caja en la misma dirección en que la caja se mueve, haciendo posible el trabajo.

La gráfica de la fricción viscosa o dinámica es expresada de la siguiente manera.

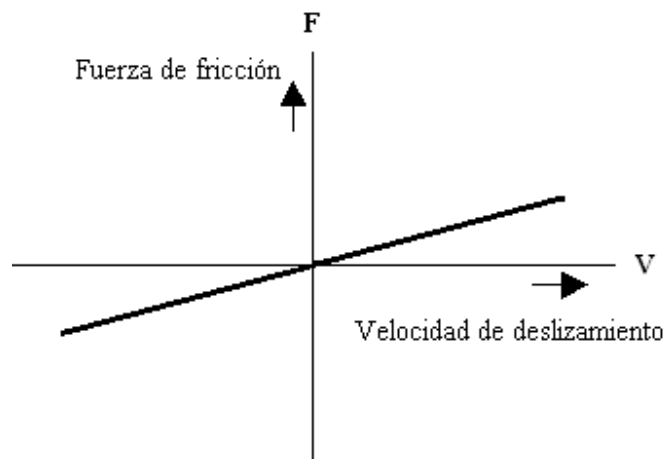


Fig. 2.3. Gráfica de fricción viscosa [14].

Ejemplos de fricción dinámica:

Fricción de fluidos. Es la fricción que se produce en un objeto sólido cuando cruza a través de un líquido o un gas. La fricción del aire en un aeroplano o del agua en un nadador son dos ejemplos de fricción de fluidos.

Fricción de deslizamiento. Es cuando dos superficies sólidas se deslizan una contra la otra. Poniendo un libro plano sobre un escritorio y moviéndolo alrededor es un ejemplo de fricción de deslizamiento. Los factores que afectan este tipo de fricción son la fuerza normal y la viscosidad de las dos superficies. Sin embargo el área superficial no es afectada por la fricción de deslizamiento. Esta fricción es muy efectiva a la oposición del movimiento de un objeto y es la fuerza que causa que un objeto detenga su movimiento.

2.3.4 Fenómeno de fricción estática

El primer modelo de fricción estática fue el modelo clásico de fricción de Leonardo Da Vinci: La fuerza de fricción es proporcional a la carga, opuesta a la dirección del movimiento y es independiente del área de contacto.

La fricción estática ocurre cuando dos objetos no están en movimiento relativo uno con otro, por ejemplo, una piedra sobre una mesa. El *coeficiente de fricción estática* es típicamente denotado por μ_s .

La fuerza inicial para conseguir el movimiento de un objeto es a menudo denominado fricción estática. La fricción estática es en la mayoría de los casos más alta que la fricción dinámica. La fricción balanceada ocurre cuando un objeto “rueda” sobre otro, por ejemplo las llantas de un carro sobre el suelo. Este es clasificado dentro de fricción estática porque el área de la llanta en contacto con el suelo, en cualquier punto mientras la llanta gira, es relativamente *estacionario* al piso.

La fricción limitada es el máximo valor de fricción estática, igual a la fuerza aplicada al cuerpo sobre el borde del movimiento que cruza una superficie.

El fenómeno de fricción estática solo tiene una dependencia estática en velocidad.

La idea de fricción estática fue introducida por Morin en el año de 1833, la cual es una fuerza de fricción opuesta a la dirección del movimiento cuando el deslizamiento de la velocidad es cero.

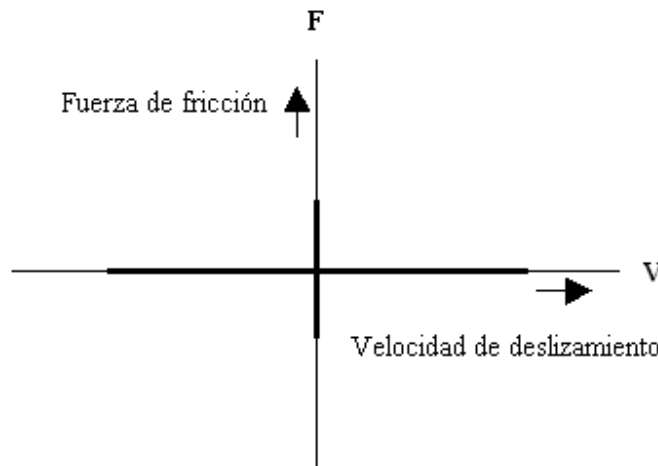


Fig. 2.4. Gráfica de la fuerza de fricción estática [14].

La fuerza de fricción estática es igual a las fuerzas extensibles mientras un máximo o un mínimo, es alcanzado: $F_{\max} = Fn\mu_s$, $F_{\min} = -Fn\mu_s$.

donde:

F_{\max} = Fuerza de fricción estática máxima.

F_{\min} = Fuerza de fricción estática mínima.

F_n = Fuerza normal.

μ_s = Coeficiente de fricción estática (constante).

2.4 Modelos de fricción

La fricción es un fenómeno difícil de modelar debido a las muchas consideraciones que se encuentran implicadas, por ejemplo temperatura, el material de los cuerpos, la lubricación, el desgaste, etc. [2]. A pesar de la complejidad del fenómeno de la fricción, en el control de sistemas mecánicos, podemos hallar que varios modelos son adoptados generalmente en identificación de fricción.

Los modelos utilizados para la identificación de fricción, se dividen en dos tipos, el primero hace referencia a los modelos estáticos y el segundo a los modelos dinámicos. Los modelos estáticos comprenden los modelos clásicos que existen para la identificación de fricción tales como son el modelo de fricción viscosa y de Coulomb (viscous plus Coulomb memoryless model), el modelo de Karnopp (the Karnopp model) y el modelo de fricción de Armstrong (Armstrong's model). Los modelos dinámicos existentes son el modelo de fricción de Dahl (the Dahl model), el modelo de fricción de cerdas (the bristle model), el modelo integrador de reajuste (the reset integrator model), los modelos de fricción por Bliman y Sorine (the models by Bliman and Sorine), los modelos para contactos lubricados (Models for lubricated contacts), el modelo de fricción de LuGre (the LuGre model), y dentro de estos mismo podemos considerar el modelo más actual, el modelo generalizado deslizado de Maxwell o GMS por su siglas en inglés (Generalized Maxwell-Slip).

En esta sección se trata una breve descripción de los modelos de fricción mencionados.

Modelos clásicos

Los modelos clásicos de fricción consisten en diferentes componentes, cada cual toma cuidado de ciertos aspectos de la fuerza de fricción. La idea principal es que la fricción se opone al movimiento y que esta es una magnitud dependiente de la velocidad y el área de contacto [3]. Esta por ejemplo se puede ser descrita por:

$$F = F_c \operatorname{sgn}(v) \quad (2.4)$$

donde:

F=Fuerza de fricción.
 F_C =Fricción de Coulomb
 sgn = Función signo
 v = Velocidad

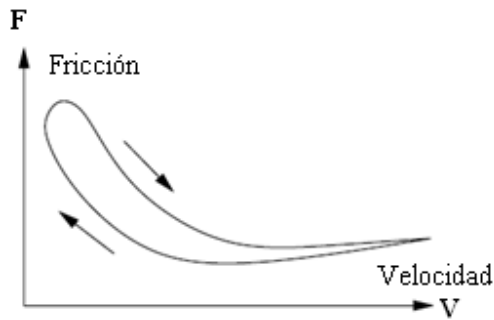


Fig. 2. 5. Lazo de histéresis entre fricción y velocidad [3].

La figura 2.5 muestra la relación entre fricción y velocidad, y de esta gráfica podemos concluir que la fuerza de fricción es menor para el decremento de la velocidad que para el incremento de la velocidad. El lazo de histéresis se convierte más de par en par como la variación de la velocidad se vuelve más rápida.

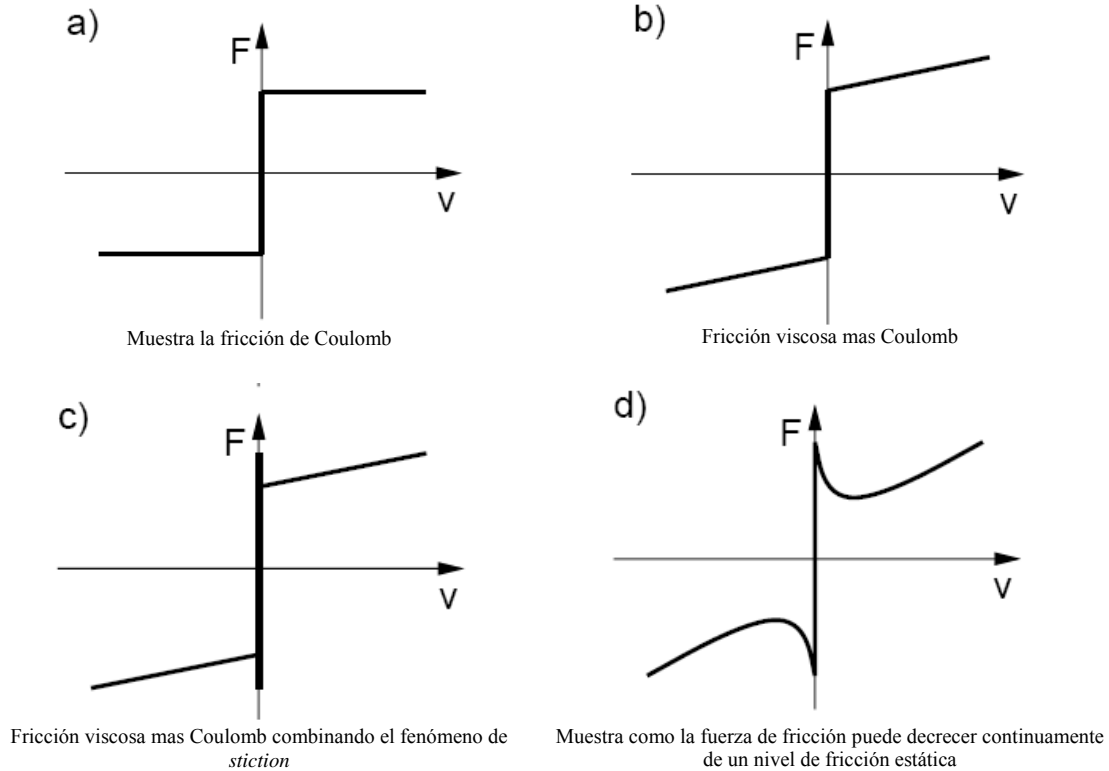


Fig. 2.6 Ejemplos de modelos de fricción estática [3].

donde la fuerza de fricción F_C es proporcional a la carga normal, es decir $F_C = \mu F_N$. Esta descripción de fricción es llamada *fricción de Coulomb*, observe la figura 2.6 a) observe que el modelo ideal de transmisión. La fricción de Coulomb no especifica la fuerza de fricción para velocidades cero. Eso puede ser cero o eso puede aceptar cualquier valor en el intervalo entre $-F_C$ y F_C , dependiendo de cómo sea definida la función signo, situación que implica una indeterminación en reposo, de la siguiente manera.

$$\operatorname{sgn}(v) = \begin{cases} 1; & v > 0 \\ \text{Indeterminación}; & v = 0 \\ -1; & v < 0 \end{cases}$$

A menudo se realiza una aproximación con funciones hiperbólicas definidas con el siguiente límite, como ejemplo: $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \tanh(\beta v) = \operatorname{sgn}(v)$, es continua y derivable en toda la extensión de velocidades.

El modelo de fricción de Coulomb tiene, debido a su simplicidad, es usado a menudo para la compensación de fricción [3].

En el siglo 19 la teoría de hidrodinámica fue desarrollada conduciendo a expresiones para la fuerza de fricción causada por la viscosidad de lubricantes.

El término *fricción viscosa* es usado para este componente de la fuerza, el cual es normalmente descrito como:

$$F = F_v v \quad (2.5)$$

Donde:

$$\begin{aligned} F &= \text{Fuerza de fricción total} \\ F_v &= \text{Fricción viscosa} \\ v &= \text{Término de velocidad} \end{aligned}$$

La fricción viscosa es combinada frecuentemente con la fricción de Coulomb como muestra la figura 2.6 b). Mejor ajuste al dato experimental a menudo es obtenido por una dependencia no lineal de la velocidad.

$$F = F_v |v|^{\delta_v} \operatorname{sgn}(v) \quad (2.6)$$

Donde δ_v depende de la geometría de la aplicación, es decir de la forma que posean las superficies que se encuentran en contacto [3].

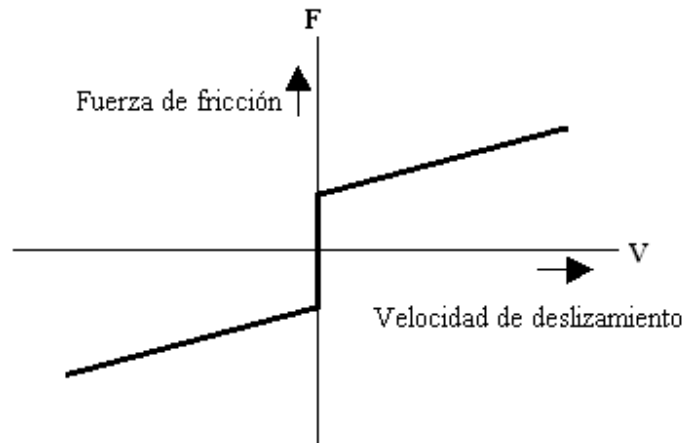


Fig. 2.7. Modelo de fricción viscosa y fricción de Coulomb [14].

El fenómeno de *stiction* es pequeño para fricción estática como opuesta a la fricción dinámica. Eso describe la fuerza de fricción en reposo [4]. Introducida la idea de una fuerza de fricción en reposo que es más alta que el nivel de fricción de Coulomb. La fricción estática contraria a las fuerzas externas bajo un cierto nivel y así guarda un objeto del movimiento [3].

Esta por lo tanto claro que la fricción en estado de reposo no puede ser definida como una función de solo movimiento. En cambio esto tiene que ser modelado usando una fuerza externa F_e de la siguiente manera.

$$F = \begin{cases} F_e & \text{if } v = 0 \text{ and } |F_e| < F_s \\ F_s \operatorname{sgn}(F_e) & \text{if } v = 0 \text{ and } |F_e| \geq F_s \end{cases} \quad (2.7)$$

La fuerza de fricción para las velocidades cero es una función de la fuerza externa y no de la velocidad. La manera tradicional de representar la fricción en diagramas de bloque con la velocidad como entrada y la fuerza como la salida es por lo tanto no completamente correcta. Si hacemos eso, el fenómeno de *stiction* debe ser expresado como una función multivalor y eso quiere decir que puede tomar cualquier valor entre los dos extremos $-F_s$ y F_s . Especificando *stiction* de esta manera conduce a no únicamente una solución de las ecuaciones de movimiento para el sistema [3].

Los componentes clásicos de la fricción pueden ser combinados en diferentes maneras, observe la figura 2.6 c), y cualquier combinación se refiere como un modelo clásico. Esos modelos tienen componentes que tienen cualquier linealidad en la velocidad o constante. En el efecto Stribeck se observa que la fuerza de fricción no tiene un decremento discontinuamente como en la figura 2.6 c), pero que la velocidad dependiente es continúa

como esta mostrado en la figura 2.6 d). Esto es nombrado la fricción de Stribeck. Una descripción mas general de fricción que los modelos clásicos es, por lo tanto [3],

$$F = \begin{cases} F(v) & \text{if } v \neq 0 \\ Fe & \text{if } v = 0 \text{ and } |Fe| < F_s \\ F_s \operatorname{sgn}(Fe) & \text{de manera diferente} \end{cases} \quad (2.8)$$

donde $F(v)$ es una función arbitraria, la cual puede mostrarse como en la figura 2.6 d). Un número de parametrizaciones de $F(v)$ han estado propuestos. Una forma común de la no linealidad es

$$F(v) = F_c + (F_s - F_c)e^{-|v/v_s|^{\epsilon_s}} + F_v v \quad (2.9)$$

donde v_s es llamada la velocidad de Stribeck. Tales modelos han sido usados por un largo tiempo. La función F es obtenida fácilmente midiendo la fuerza de fricción para movimientos con velocidad constante. La curva es frecuentemente asimétrica [3].

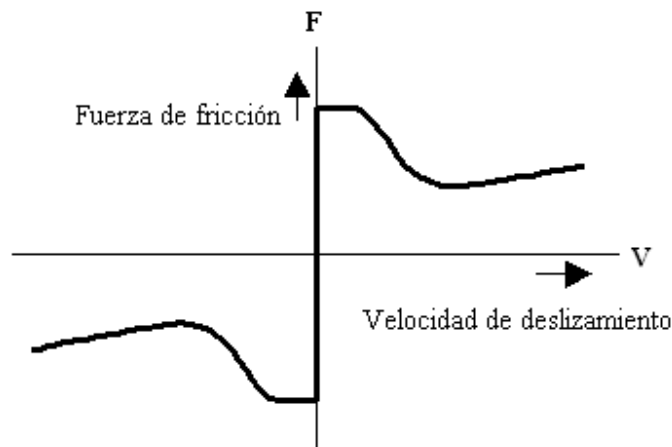


Fig. 2.8. Modelo de fricción viscosa, fricción de Coulomb, con el efecto Stribeck [14].

2.4.1 Modelo de fricción de Karnopp.

La principal desventaja cuando usamos un modelo como en la ecuación descrita en (2.8), para simulaciones o propósitos de control, está el problema de detección cuando la velocidad es cero. Un remedio para esto es encontrado en el modelo presentado por

Karnopp. Este fue desarrollado para superar los problemas con la detección de velocidad cero y para evitar cambios entre las diferentes ecuaciones de estado para *sticking* y deslizamiento. El modelo define un intervalo de velocidad cero, $|v| < DV$. Para velocidades dentro de este intervalo el estado interno del sistema (la velocidad) puede cambiar y no ser cero, pero la salida del bloque es mantenido en cero por un límite. Dependiendo de si $|v| < DV$ o no, la fuerza de fricción esta en cualquiera de las dos una versión saturada de la fuerza externa o una función estática arbitraria de velocidad. El intervalo $\pm DV$ puede estar bastante áspero y mantenerse ascendiendo así para llamarse el comportamiento *stick-slip*.

El retiro del modelo esta relacionado con el reposo del sistema. La fuerza externa es una entrada del modelo y esta fuerza no siempre es proporcionada explícitamente. El modelo por lo tanto tiene que ser armado para cada una de las configuraciones. Variaciones del modelo de Karnopp son ampliamente usadas desde que ellas permiten eficientes simulaciones. Tiene el intervalo de velocidad cero, sin embargo, no coinciden con fricción real.

Los modelos de fricción presentados por ahora tienen solo consideraciones de fricción con velocidad constante. No prestan atención al comportamiento de fricción cuando la velocidad es variada [3].

2.4.2 Modelo de fricción Armstrong.

El modelo de fricción de Armstrong tiene una gran importancia y un gran nivel de aplicación, debido a que este modelo puede capturar un comportamiento verdadero cuando se trabaja a bajas velocidades.

A bajas velocidades se produce un fenómeno importante denominado el efecto Stribeck. El modelo es caracterizado por una reducción de la fricción cuando la velocidad crece mientras todavía está dentro de valores bajos, y esto se encuentra descrito en el modelo de Armstrong.

Descrito para algunos de los fenómenos observados de fricción dinámica un modelo clásico puede ser modificado como lo propuesto por el modelo de Armstrong. Este modelo introduce una dependencia temporal de *stiction* y el efecto Stribeck, pero no se encarga de la sustitución del predeslizamiento. Esto se lleva a cabo por la descripción del comportamiento de *sticking* para una ecuación separada. Algunos mecanismos deben gobernar el cambio entre el modelo para *sticking* y el modelo de deslizamiento. La fricción es descrita por [3],

$$F(x) = \sigma_0 x \tag{2.10}$$

Donde:

$F(x)$ = Fricción de Armstrong en función de x
 σ_0 = Coeficiente de rigidez de una cerda.

Cuando se presenta el fenómeno de *sticking* por

$$F(v, t) = \left(F_C + F_S(\gamma, t_d) \frac{1}{1 + (v(t - \tau_l) / v_s)^2} \right) \text{sgn}(v) + F_v v \quad (2.11)$$

donde:

$F(v, t)$ = Es la fuerza de fricción de Armstrong en *sticking*.

F_C = Fricción de Coulomb.

F_S = Fricción de Stribeck.

$F_v v$ = Modelo de fricción viscosa.

$\text{sgn}(v)$ = Función signo de la velocidad.

v_s = Velocidad de Stribeck.

t_d = Tiempo desde el rozamiento inicial.

Cuando se presenta el deslizamiento

$$F_S(\gamma, t_d) = F_{S,a} + \left(F_{S,\infty} - F_{S,a} \frac{t_d}{t_d + \gamma} \right) \quad (2.12)$$

donde:

$F_S(\gamma, t_d)$ = Fuerza de fricción de Armstrong en deslizamiento.

$F_{S,a}$ = Fricción de Stribeck

t_d = Tiempo desde el rozamiento inicial.

$F_{S,a}$ es la fricción de Stribeck al final del periodo de deslizamiento previo y t_d tiempo pasado, es decir, el tiempo desde el rozamiento inicial. La fricción de deslizamiento (2.11) es la fricción de Stribeck que ha sido remplazada por una versión retrasada y donde eso tiene un coeficiente dependiente del tiempo. El modelo requiere de siete parámetros.

Dado que el modelo consiste de dos ecuaciones separadas, uno para la *sticking* y uno para el deslizamiento (*sliding*), una declaración lógica- probablemente requiriendo un

octavo parámetro determina el cambio. Es más, el modelo de estados tiene que ser inicializado apropiadamente cada vez que el cambio ocurra.

2.4.3 Modelo de fricción de Dahl.

El modelo de Dahl fue desarrollado para el propósito de simulado de sistemas de control con fricción. El modelo es además ha sido usado para compensación adaptable de fricción. Los inicios del modelo Dahl fueron varios experimentos sobre fricción en servo sistemas con bolas del cojinete. Esos experimentos indicaron que se producían contactos de metales en la superficie. Dahl desarrollo un sencillo modelo comparativo que fue usado ampliamente para simular sistemas con la fricción en las bolas de los cojinetes.

El punto de partida para el modelo de Dahl es la curva *stress-strain* en mecanismos sólidos clásicos, ver la figura 2.9. Cuando se somete a estrés la fuerza de fricción aumenta gradualmente hasta que ocurre la ruptura. Dahl modelo la curva de *stress-strain* por una ecuación diferencial. Dejando a x ser el desplazamiento, F la fuerza de Fricción, y F_c la fuerza de fricción de Coulomb. El modelo de Dahl tiene la forma [3].

$$\frac{dF}{dx} = \sigma \left(1 - \frac{F}{F_c} \operatorname{sgn} v \right)^\alpha \quad (2.13)$$

donde σ es el coeficiente de rigidez y α es un parámetro que determina la forma de la curva *stress-strain*, v es la velocidad, tal como se muestra en la figura 2.9, donde v es representada por la derivada de la posición (x), es decir \dot{x} y la función **sgn** determina el signo de la velocidad. El valor $\alpha = 1$ es el más comúnmente usado. Los valores más altos

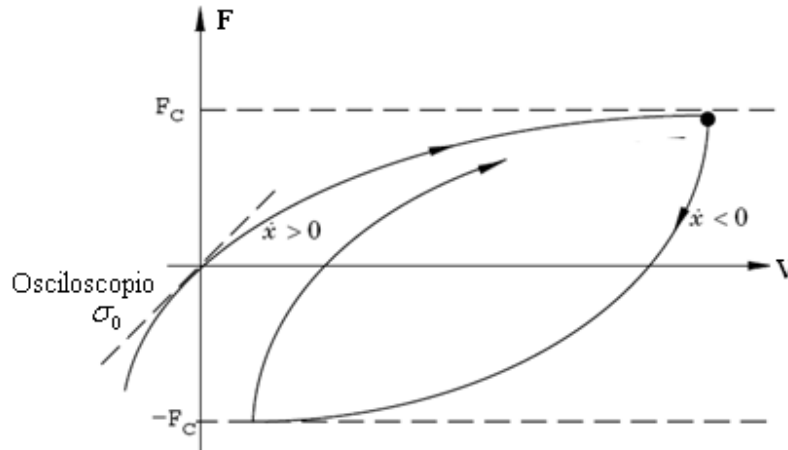


Fig. 2.9. Fuerza de fricción como una función de desplazamiento para el modelo de Dahl [3].

dados por la curva *stress-strain* con una forma de curva. La fuerza de fricción $|F|$ nunca será más grande que F_c si el valor inicial es tal que $|F(0)| < F_c$.

Note que en este modelo la fuerza de fricción es solo una función de desplazamiento y el signo de la velocidad. Esto implica que la fuerza de fricción es solo dependiente de la posición. Este supuesto valor independiente es una importante propiedad del modelo. Esto hace que sea posible el uso de la teoría de operadores de histéresis. Esto es además usado en extensiones del modelo.

Para obtener un modelo en el dominio del tiempo Dahl observó que

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dF}{dx} v = \sigma \left(1 - \frac{F}{F_c} \operatorname{sgn} v \right)^\alpha v \quad (2.14)$$

El modelo es una generalización de la fricción ordinaria de Coulomb. El modelo de Dahl tampoco captura el efecto Stribeck, lo cual es una proporción del fenómeno dependiente, ni tampoco captura el fenómeno de *stiction*. Esos son los principales motivos para las recientes extensiones del modelo.

Para el caso $\alpha = 1$ el modelo de Dahl (2.14) se convierte en

$$\text{Ya que } \operatorname{sgn}(v) = |v|$$

$$\frac{dF}{dt} = \sigma v - \frac{F}{F_c} |v| \quad (2.15)$$

Introduciendo $F = \sigma z$ el modelo puede ser escrito como

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= v - \frac{\sigma |v|}{F_c} z \\ F &= \sigma z \end{aligned} \quad (2.16)$$

2.4.4 Modelo de la cerda.

Haessig y Friedland introdujeron un modelo de fricción, el cual procura capturar el comportamiento de los puntos de contacto microscópico entre dos superficies. Debido a irregularidades en las superficies el número de puntos de contacto y su localización son aleatorios. Como las superficies se mueven relativamente de una hacia otra la tensión en el enlace se incrementa y las cerdas actúan como proporcionando un aumento de la fuerza de fricción. La fuerza es entonces dada por la ecuación (2.17).

$$F = \sum_{i=1}^N \sigma_0 (x_i - b_i) \quad (2.17)$$

donde N es el número de cerdas, σ_0 la rigidez de las cerdas, x_i la posición relativa de las cerdas, y b_i la localización donde la unión fue formada. Como $|x_i - b_i|$ son iguales δ_s el enlace se rompe y uno nuevo es formado en una localización relativa aleatoria a la localización previa.

La complejidad de este modelo incrementa con N . Buenos resultados fueron encontrados utilizando de 20 a 25 cerdas, pero incluso una sencilla cerda da un comportamiento cualitativo razonable. La rigidez de las cerdas, σ_0 , puede hacerse dependiente de la velocidad. Una propiedad interesante del modelo es que captura la naturaleza aleatoria de la fricción. La aleatoriedad depende del número de cerdas. El modelo es ineficiente en simulaciones debido a su complejidad. El movimiento en *sticking* puede ser oscilatorio dado que las cerdas no están lubricadas en el modelo [3].

2.4.5 Modelo integrador de reajuste.

Haessig y Friedland además propusieron el modelo integrado de reajuste. Este modelo puede ser visto como un intento por hacer el modelo de cerdas computacionalmente factible. En vez de encajar a presión una cerda el enlace es mantenido constante por el corte del incremento en la tensión en su punto de ruptura. El modelo utiliza un estado extra para determinar la tensión en la unión, el cual es modelado por

$$\frac{dz}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{Si } (v > 0 \text{ y } z \geq z_0) \text{ o } (v < 0 \text{ y } z \leq -z_0) \\ v & \text{De otra forma} \end{cases} \quad (2.18)$$

La fuerza de fricción está dada por

$$F = (1 + a(z)) \sigma_0 (v) z + \sigma_1 \frac{dz}{dt} \quad (2.19)$$

donde $\sigma_1 \frac{dz}{dt}$ es un término del factor de amortiguamiento que está activo solo cuando se produce el fenómeno de *sticking*. El coeficiente del factor de amortiguamiento puede ser elegido para proporcionar un factor de amortiguamiento del resultado de un sistema resorte-masa-amortiguador. La *stiction* es archivada por la función $a(z)$, la cual está dada por

$$a(z) = \begin{cases} a & \text{if } |z| < z_0 \\ 0 & \text{De otra forma} \end{cases} \quad (2.20)$$

Si $|z| < z_0$ el modelo describe *sticking* donde la fuerza de fricción es una función de z . Como la deflexión alcanza su máximo valor z_0 , la variable z sigue siendo constante y la fuerza de fricción cae dado que $a(z)$ se vuelve cero. La fuerza de fricción al estarse deslizando es una función arbitraria de la velocidad dado por $\sigma_0(v)$. El modelo integrador de reajuste es mucho más eficiente para simular que el modelo de cerdas, pero este tiene una discontinuidad en z , y detección de $|z| > z_0$ es necesaria.

2.4.6 Modelo de fricción de Bliman y Sorine.

Bliman y Sorine han desarrollado una familia de modelos dinámicos en una serie de papers [6, 7, 8]. Estos son basados en las investigaciones experimentales de Rabinowicz [9].

Bliman y Sorine tomaron un rango de tensión independiente. La magnitud de la fricción depende solo de la función $\text{sgn}(v)$ y el espacio de la variable s es definido por

$$s = \int_0^t |v(\tau)| d\tau \quad (2.21)$$

En los modelos de Bliman y Sorine, la fricción es entonces una función de la trayectoria solamente. Esto hace posible el usar una elegante teoría de operadores de histéresis. Los modelos son expresados como sistemas lineales en la variable de espacio s .

$$\begin{aligned} \frac{dx_s}{ds} &= Ax_s + Bv_s \\ F &= Cx_s \end{aligned} \quad (2.22)$$

La variable $v_s = \text{sgn}(v)$ es requerida para obtener un signo correcto. Bliman y Sorine tienen modelos de diferentes complejidades. El modelo de primer orden esta dado por

$$A = -1/\varepsilon_f, \quad B = f_1/\varepsilon_f \quad \text{y} \quad C = 1 \quad (2.23)$$

Este modelo puede ser descrito como:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{ds} \frac{ds}{dt} = |v| \frac{dF}{ds} = f_1 / \varepsilon_f \left(v - |v| \frac{F}{f_1} \right) \quad (2.24)$$

El cual es idéntico al modelo de Dahl (15) con $F_c = f_1$, $\sigma = f_1 / \varepsilon_f$ y $\alpha = 1$. El modelo de primer orden no contiene el fenómeno de *stiction*, no está dado por un punto en la distancia de separación específico como observado por Rabinowicz. Esto puede, sin embargo, ser archivado por un modelo de segundo orden con

$$A = \begin{pmatrix} -1/(\eta\varepsilon_f) & 0 \\ 0 & -1/\varepsilon_f \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

$$B = \begin{pmatrix} f_1 / \eta\varepsilon_f \\ -f_2 / \varepsilon_f \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = (1 \quad 1)$$

donde $f_1 - f_2$ corresponden a la fricción dinámica que aumenta exponencialmente como $s \rightarrow \infty$. El modelo (2.25) puede ser visto como una conexión paralela de un rápido y lento modelo de Dahl. El modelo rápido tiene un valor más alto de la fricción en estado estacionario que el modelo lento. La fuerza del modelo lento es sustraída del modelo rápido, el cual resulta en un punto de *stiction*. Ambos el modelo de primer orden y el de segundo orden pueden ser mostrados siendo disipativos. Bliman y Sorine además mostraron que, como ε_f tiende a cero, el modelo de primer orden se comporta como un modelo de fricción clásico de Coulomb, y el modelo de segundo orden como un clásico modelo con fricción de Coulomb y *stiction*. Debe ser observado que el efecto Stribeck del modelo de segundo orden, demandado por los autores, no es el mismo que se observa en [10]. El efecto emulado por el modelo de segundo orden esta solamente presente en cierta distancia después de que el movimiento inicia. Esto significa que este no aparecerá cuando el movimiento reduzca su velocidad, como el verdadero efecto Stribeck lo haría. La fricción pico es en cambio el equivalente de *stiction* para un modelo dinámico.

2.4.7 Modelo de fricción para contactos lubricados.

Las interfaces de fricción en la mayoría de las aplicaciones de la ingeniería están lubricadas. Los modelos de la fricción por lo tanto se han derivado usando la hidrodinámica. La fricción viscosa es un sencillo ejemplo, pero otros modelos también existen. En [11] un modelo basado en la hidrodinámica de un cojinete lubricado es publicado en esta revista. El modelo tensiona la dinámica de la fuerza de fricción. La excentricidad ε del cojinete es una variable importante en la determinación de la fuerza de fricción. Un modelo simplificado esta dado por:

$$F = K_1 (\varepsilon - \varepsilon_r)^2 \Delta + \frac{K_2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} v \quad (2.26)$$

En la ecuación 2.26 F representa la fuerza de fricción para contactos lubricados, el primer término es debido al corte de las superficies ásperas y el segundo término es debido a la viscosidad del lubricante, K_1 es una constante de la superficie, que denota la aspereza del material, y K_2 es la constante de la viscosidad del lubricante. La función Δ es una función del indicador que es uno para $\varepsilon > \varepsilon_r$ y cero de lo contrario. La excentricidad está dada por una ecuación diferencial de cuarto orden, el cual determina la distribución de la presión en el lubricante. El modelo requiere de cinco parámetros. Las simulaciones muestran un comportamiento muy similar a las observaciones que se tienen en [12]. Una extensión incluyendo una conformidad en la manga es dada en [13]. El modelo entonces se convierte en aún más complicado y requiere la determinación de valores iniciales cuando se hace el cambio entre deslizamiento y el sticking.

2.4.8 Modelo de fricción de LuGre.

Con la fricción existen características muy importantes que se observan en los sistemas y que no se pueden explicar solamente por los mapas estáticos entre la velocidad y fuerza de la fricción (o esfuerzo de torsión). Esto es básicamente debido al hecho de que la fricción no tiene una respuesta instantánea en un cambio de velocidad, es decir, tiene una dinámica interna. [2]

El modelo propuesto de LuGre es un modelo dinámico de la fricción que captura características estáticas y dinámicas de la fricción

A bajas velocidades se produce un fenómeno importante denominado el efecto Stribeck. El modelo es caracterizado por una reducción de la fricción cuando la velocidad crece mientras todavía está dentro de valores bajos, y esto se encuentra descrito en el modelo de Armstrong.

El modelo de LuGre de la fricción es el que cuenta con resultados más cercanos y lo mejor posible a las respuestas experimentales reales de la velocidad. [2]

El modelo de LuGre es un modelo de fricción dinámica. El modelo es relacionado a una interpretación de cerdas de fricción. La fricción es modelada como el promedio de la fuerza de deflexión de los resortes elásticos. Si la deflexión es suficientemente grande las cerdas comienzan a deslizarse. El promedio de deflexión de cerdas para un movimiento en estado estacionario es determinado por la velocidad. Eso es menor a bajas velocidades, lo cual implica que la deflexión en estado estacionario decrece con el aumento de la velocidad. Esto modela el fenómeno que la superficie es empujada aparte por el lubricante, y modela el efecto Stribeck [3].

El modelo además incluye un valor dependiente del fenómeno de fricción tal como una variación de la fuerza de separación y el retraso de la fricción. El modelo tiene la forma siguiente:

$$\frac{dz}{dt} = v - \sigma_0 \frac{|v|}{g(v)} z \quad (2.27)$$

donde:

- z = Promedio de deflexión de las cerdas.
- v = Velocidad
- σ_0 = Coeficiente de rigidez de las cerdas.
- $|v|$ = Absoluto de la velocidad ($\text{sgn}(v)$)
- $g(v)$ = Función que describe el efecto Stribeck.

$$F = \sigma_0 z + \sigma_1(v) \frac{dz}{dt} + f(v) \quad (2.28)$$

donde z denota el promedio de deflexión de las cerdas, σ_0 es el coeficiente de rigidez de las cerdas, $\sigma_1(v)$ es el sobre-impulso y $f(v)$ es una fricción lineal viscosa. El modelo se comporta como un resorte para pequeños desplazamientos. La linealización de (2.7) alrededor de la velocidad cero y el estado cero es dada por

$$\frac{d(\delta z)}{dt} = \delta v \quad (2.29)$$

$$\delta F = \sigma_0 \delta z + (\sigma_1(0) + f'(0)) \delta v \quad (2.30)$$

El parámetro σ_0 es la rigidez de las cerdas, y $\sigma_1(v)$ el sobre impulso. Para velocidad constante la fuerza de fricción en estado estacionario es:

$$F = g(v) \text{sgn}(v) + f(v) \quad (2.31)$$

La función $g(v)$ modela el efecto Stribeck, y $f(v)$ es la fricción viscosa. Una opción razonable de $g(v)$ la cual proporciona una buena aproximación del efecto Stribeck es

$$g(v) = \alpha_0 + \alpha_1 e^{-(v/v_0)^2} \quad (2.32)$$

La suma $\alpha_0 + \alpha_1$ entonces corresponde a la fuerza de *stiction* y α_0 a la fuerza de fricción de Coulomb. El parámetro v_0 determina como $g(v)$ varía dentro de estos límites $\alpha_0 < g(v) \leq \alpha_0 + \alpha_1$. Una alternativa común de $f(v)$ es una fricción lineal viscosa $f(v) = \alpha_2 v$.

El siguiente caso especial del modelo dado por las ecuaciones (2.7) y (2.32), la cual tiene una fricción lineal viscosa y constante σ_1 , es llamado *parametrización estándar*.

$$\frac{dz}{dt} = v - \sigma_0 \frac{|v|}{g(v)} z \quad (2.33)$$

$$g(v) = \alpha_0 + \alpha_1 e^{-(v/v_0)^2}$$

$$F = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \alpha_2 v$$

Esto es útil para permitir que el sobre impulso σ_1 decrezca con el incremento de la velocidad.

$$\sigma_1(v) = \sigma_1 e^{-(v/v_d)^2} \quad (2.34)$$

Físicamente esto es motivado por el cambio de las características del sobre impulso como el incremento de la velocidad, esto se debe a que más lubricante es forzado dentro de la interfaz. Otra razón para usar (2.34) es que esta da un modelo el cual es disipativo [3].

2.4.9 Modelo de fricción GSM

El modelo de fricción GSM, es una nueva formulación cualitativa de un valor de estado aproximado al modelo Maxwell-slip. El modelo GSM conserva la estructura del modelo Maxwell-slip, el cual tiene una conexión en paralelo de diferentes elementos como masas y deslizamientos, pero reemplaza la ley simple de Coulomb gobernando en cada bloque, por otra ecuación de estado cuenta las dinámicas de deslizamiento. Así, la fuerza de fricción es dada como la sumatoria de las salidas de N elementos en el modelo de estado (observar la figura 2.10) [20]. El comportamiento dinámico de cada bloque elemental es representado por dos ecuaciones (en las cuales F_i es fuerza de fricción elemental, k_i es la constante elemental del resorte, y v es la velocidad):

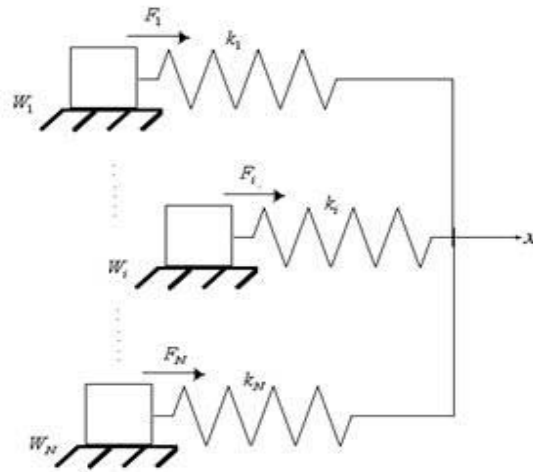


Fig. 2.10. Conexión paralela de un modelo de estado elemental de fricción [20].

- Si el modelo esta en reposo:

$$\frac{dF_i}{dt} = k_i v \quad (2.35)$$

donde:

F_i = Fuerza de fricción en sistema GSM

k_i = Constante del resorte.

v = Velocidad.

- Si el modelo esta deslizando:

$$\frac{dF_i}{dt} = \text{sgn}(v) = C = \left(\alpha_1 + \frac{F_i}{s(v)} \right) \quad (2.36)$$

donde:

F_i = Fuerza de fricción en el sistema GSM.

$\text{sgn}(v)$ = Función signo de la velocidad.

C = Parámetro de atracción.

$s(v)$ = Velocidad de Stribeck.

α_1 = Constante de aspereza de la superficie.

Cada modelo elemental (o bloque) corresponde a una aspereza generalizada en la superficie de contacto, donde este puede estar adherida a la superficie (reposo) o en deslizamiento. La aspereza se deslizará si la fuerza de fricción elemental igual al valor máximo $W_i = \alpha_i s(v)$ que eso puede sostener. En este régimen, la ecuación (2.36) se caracteriza por el comportamiento de la fricción. Una vez que el modelo se esté deslizando, eso resta el deslizamiento mientras la dirección del movimiento es invertido o esta velocidad aproxima su valor a cero. Cuando la aspereza está en reposo el modelo elemental actuará como un resorte con rigidez de k_i [20].

2.5 Modelo dinámico de un robot manipulador.

Considérese un robot manipulador de n eslabones. La energía ε de un robot manipulador de n g.d.l. es la suma de sus energías cinéticas K y potencial U .

$$\varepsilon(q(t), \dot{q}(t)) = K(q(t), \dot{q}(t)) + U(q(t)) \quad (2.37)$$

donde $q(t) = [q_1(t), \dots, q_n(t)]^T$

El lagrangiano $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ de un robot manipulador de n g. d. l. es la diferencia de su energía cinética K y su energía potencial U :

$$\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) = K(q(t), \dot{q}(t)) - U(q(t)). \quad (2.38)$$

Aquí se considera que la energía potencial U se debe a fuerzas conservativas como la fuerza de gravedad y a fuerzas de resortes.

Las ecuaciones de movimiento de Lagrange para un manipulador de n g. d. l. viene dada por:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q} = \tau, \quad (2.39)$$

o de forma equivalente

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}(q, \dot{q})}{\partial q_i} = \tau_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.40)$$

donde τ_i son las fuerzas y pares ejercidos externamente (por actuadores en cada articulación así como fuerzas no conservativas. Como fuerzas no conservativas se incluyen las de la fricción, las de resistencia al movimiento de un objeto dentro de un fluido, y en general las que dependen del tiempo o de la velocidad.

Nótese que se tendrán tantas ecuaciones escalares dinámicas como g. d. l. tenga el robot manipulador.

El uso de ecuaciones de Lagrange para el modelo dinámico de manipuladores se reduce a cuatro etapas:

1. Cálculo de la energía cinética: $K(q(t), \dot{q}(t))$
2. Cálculo de la energía potencial: $U(q(t))$
3. Cálculo del lagrangiano: $\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t))$
4. Desarrollo de las ecuaciones de Lagrange.(referencia pendiente)

Para obtener el modelo dinámico de un robot manipulador se utiliza la formulación de Euler-Lagrange (2.41), en la cual se debe obtener un Lagrangiano (L), el cual es la diferenciad entre la energía cinética y la energía potencial de un cuerpo en movimiento en un punto dado de su trayectoria [16]. Para la obtención del Lagrangiano es necesario obtener la energía cinética y potencial de cada uno de los eslabones que componen al robot

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}} \right] - \frac{\delta L}{\delta \theta} = \tau \quad (2.41)$$

Los eslabones se numeran consecutivamente desde la base (eslabón 0) hasta el final (Eslabón n). Las uniones son los puntos de contacto entre los eslabones y se numeran de tal forma que la unión i conecta los eslabones i e $i-1$.

Cada articulación se controla independientemente a través de un actuador, que se coloca generalmente en dicha unión, y el movimiento de las uniones produce el movimiento relativo de los eslabones. Aquí se denotará temporalmente por z_i , al eje de movimiento de la unión i . La coordenada articular generalizada denotada por q_i es el desplazamiento angular alrededor de z_i si la unión i es traslacional. En el caso típico donde los actuadores se localizan en las uniones entre los eslabones, las coordenadas articulares generalizadas reciben el nombre de *posiciones articulares* [16].

Las posiciones articulares correspondientes a cada articulación del robot, que se miden por medio de sensores colocados en los actuadores localizados generalmente justo en las articulaciones, se agrupan para propósitos de análisis en el vector de posiciones

articulares q . En consecuencia, para un robot con n articulaciones, es decir, de n g.d.l., el vector de posiciones articulares q tendrán n elementos:

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

Por otro lado, también resulta de gran interés, sobre todo desde un punto de vista práctico, la determinación de la posición y orientación del dispositivo terminal del robot, puesto que este dispositivo terminal realiza la tarea encomendada al robot, tal como abrir o cerrar una garra, aplicar una soldadura, etc. Dicha posición y orientación se expresa en términos del marco de referencia coordenado cartesiano (x, y, z) colocado en la base del robot, así como eventualmente en términos de los llamados ángulos Euler [16]. Dichas coordenadas (y ángulos) son agrupados en el vector x de posiciones cartesianas (conocidas también como posiciones operacionales).

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Donde $m \leq n$. Este es el escenario donde el extremo final del robot puede tomar cualquier posición y orientación en el espacio euclidiano de dimensión 3, se tendrá $m=6$. Por otra parte, si el movimiento del robot se realiza en un plano (dimensión 2) y sólo interesa la posición de su extremo final, entonces $m=2$. Si además, se está interesado en su orientación en el plano, entonces $m=3$ [16].

El modelo dinámico de un robot consiste en una ecuación diferencial (ordinaria) vectorial en las posiciones, ya sean articulares q o cartesianas x , generalmente de segundo orden, pudiéndose expresar como:

$$f(q, \dot{q}, \ddot{q}, \tau) = 0, \quad (2.42)$$

$$f(x, \dot{x}, \ddot{x}, \tau) = 0, \quad (2.43)$$

En (2.42) y (2.43) no es la misma ecuación, ni tampoco debe ser confundida con la relación $f(q)$ del modelo cinemático directo y, finalmente, τ denota al vector de pares y fuerzas aplicadas en las articulaciones por medio de los actuadores. El modelo dinámico (2.42) recibe el nombre de modelo dinámico articular, mientras que (2.43) es el modelo dinámico cartesiano [16].

Uno de los procedimientos más empleados para la obtención de los modelos dinámicos de los robots manipuladores, en forma cerrada, es el basado en las ecuaciones de movimiento de Lagrange.

2.5.1 Propiedades dinámicas de un robot manipulador.

La ecuación dinámica de un sistema robot en forma estándar esta dado por

$$\tau = H(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + G(\theta) + F(\dot{\theta}) \quad (2.44)$$

Donde

$H(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$: Matriz de inercias.

$C(\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$: Matriz de Coriolis y centrípetas.

$G(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$: Vector de fuerzas gravitacionales.

$F(\dot{\theta}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$: Vector de fuerzas de fricción.

n : Número de grados de libertad del sistema.

Cada una de las matrices que conforman la forma estándar del robot poseen propiedades de gran interés para el estudio de sistemas de control para robots manipuladores, entre las más utilizadas se encuentran las siguientes [21].

Propiedad 1. La matriz de inercia $H(\theta)$ es una matriz simétrica, definida positiva, cuyos elementos son funciones de θ [21].

$$H(\theta) = H(\theta)^T \quad (2.45)$$

$$x^T H(\theta) x > 0; \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad (2.46)$$

Propiedad 2. Antisimétrica: la matriz de Coriolis $C(\theta, \dot{\theta})$ se encuentra relacionada con la matriz de inercias $H(\theta)$ por la expresión siguiente [21].

$$x^T \{ \dot{H}(\theta) - 2C(\theta, \dot{\theta}) \} x \equiv 0; \quad \forall x \in \mathbf{R}^{n \times 1} \quad (2.47)$$

Propiedad 3. Linealidad en términos de los parámetros dinámicos [21].

$$H(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + G(\theta) + F(\dot{\theta}) = Y(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})P \quad (2.48)$$

Con $Y(\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta})$ es una matriz de $n \times m$ y P es un vector de $m \times 1$ que contiene las m constantes dependientes de los parámetros dinámicos.

Propiedad 4. El vector de fuerzas de fricción se encuentra conformado por la sumatoria de la fricción seca y viscosa del robot expresado como: $F(\dot{\theta}) = F_v \dot{\theta} + F_d$ donde el vector de fricción viscosa es asumido como se muestra en la siguiente ecuación [21].

$$F_v \dot{\theta} = \forall v_i \dot{\theta}_i \quad (2.49)$$

Con v_i es el coeficiente constante. La fricción seca se obtiene por medio de

$$F_d(\dot{\theta}) = \forall k_i \operatorname{sgn}(\dot{\theta}_i) \quad (2.50)$$

Con k_i es el coeficiente constante. Así el término de fricción de todo robot cumple con la siguiente expresión

$$\|F_v \dot{q} + F_d(\dot{q})\| \leq v \|\dot{q}\| + k \quad (2.51)$$

donde v es el vector de coeficientes constantes de la fricción viscosa y k es el vector de coeficientes constantes de la fricción seca.

2.6 Modelado matemático del robot R2GL.

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange para el modelado de un robot de 2 grados de libertad, tenemos que:

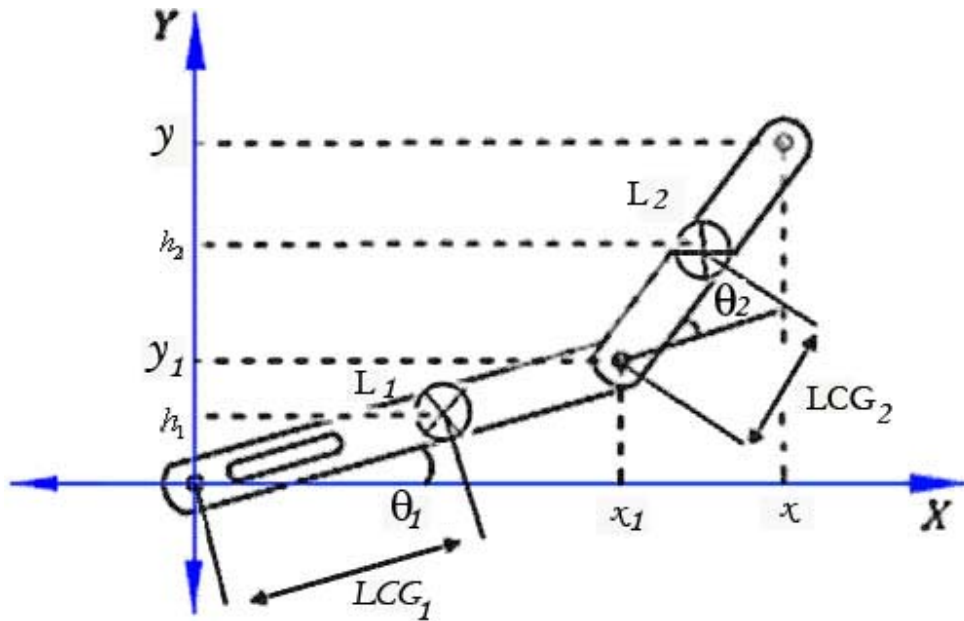


Fig. 2.11 Diagrama de un robot manipulador de 2 grados de libertad [21].

Variable	Característica	Unidad
m_1	Masa del eslabón 1	Kg
m_2	Masa del eslabón 2	Kg
x, y	Coordenadas operacionales	Rad
θ_1	Ángulo del primer eslabón con respecto al eje x	Rad
θ_2	Ángulo del segundo eslabón con respecto al primer eslabón	Rad
s_1	Seno del ángulo del primer eslabón.	Rad
s_2	Seno del ángulo del segundo eslabón.	Rad
c_1	Coseno del ángulo del primer eslabón.	Rad
c_2	Coseno del ángulo del segundo eslabón.	Rad
K_1	Energía cinética del primer eslabón.	J
K_2	Energía cinética del segundo eslabón.	J
P_1	Energía potencial del primer eslabón.	J
P_2	Energía potencial del segundo eslabón.	J
LCG_1	Longitud al centro de gravedad del eslabón 1.	m
LCG_2	Longitud al centro de gravedad del eslabón 2.	m

- **Primer eslabón**

Energía cinética. La energía cinética del primer eslabón, considerando el diagrama mostrado en la figura 2.11 está dada por la siguiente ecuación.

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad (2.52)$$

Considerando que:

$$x_1 = L_1 c_1 \quad (2.53)$$

$$y_1 = L_1 s_1 \quad (2.54)$$

La velocidad se expresa como:

$$\dot{x}_1 = -L_1 s_1 \dot{\theta}_1 \quad (2.55)$$

$$\dot{y}_1 = L_1 c_1 \dot{\theta}_1 \quad (2.56)$$

Entonces la velocidad es $v_1 = \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2}$, por lo tanto la energía cinética del eslabón 1 es

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) \quad (2.57)$$

Energía potencial. La energía potencial para el primer eslabón está dada por:

$$P_1 = m_1 g h_1 \quad (2.58)$$

h_1 ésta dada por:

$$h_1 = LCG_1 s_1 \quad (2.59)$$

Por lo tanto la energía potencial en el eslabón uno está dada por la ecuación (2.60)

$$P_1 = m_1 g LCG_1 s_1 \quad (2.60)$$

- **Segundo eslabón**

La energía cinética del segundo eslabón es

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad (2.61)$$

La posición del efector final se encuentra descrita por las ecuaciones (2.62) y (2.63)

$$x = L_1 c_1 + L_2 c_{12} \quad (2.62)$$

$$y = L_1 s_1 + L_2 s_{12} \quad (2.63)$$

La velocidad 2 se expresa como:

$$\dot{x}_2 = -L_1 s_1 \dot{\theta}_1 - L_2 s_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \quad (2.64)$$

$$\dot{y}_2 = L_1 c_1 \dot{\theta}_1 + L_2 c_{12} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \quad (2.65)$$

Entonces la velocidad es $v_2 = \sqrt{\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2}$, por lo tanto la energía cinética del eslabón 2 es

$$K^2 = \frac{1}{2} m_2 L_1^2 \dot{\theta}^2 + m_2 L_1 L_2 c_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + \frac{1}{2} m_2 L_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \quad (2.66)$$

h_2 ésta dada por:

$$h_2 = L_1 S_1 + LCG_2 S_{12} \quad (2.67)$$

Energía potencial. La energía potencial para el segundo eslabón está dada por:

$$P_2 = m_2 g L_1 S_1 + m_2 g LCG_2 S_{12} \quad (2.68)$$

Sustituyendo la energía potencial y la energía cinética en el Lagrangiano tenemos que:

El Lagrangiano está dado por

$$L = K_1 + K_2 - (P_1 + P_2) \quad (2.69)$$

Por lo tanto el sustituyendo en (2.69) se tiene que el Lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2}m_1L_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2L_1^2\dot{\theta}_1^2 + m_2L_1L_2c_2\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + \frac{1}{2}m^2L_2^2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 - m_1gLCG_1S_1 - m_2gL_1S_1 - m_2gLCG_2S_{12} \quad (2.70)$$

Una vez que se obtiene el Lagrangiano, se realizan las operaciones de la formulación de Euler-Lagrange y se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento del sistema

$$\tau_1 = \{Lm_1 + m_2L_1^2 + 2m_2L_1L_2C_2 + m_2L_2^2\}\ddot{\theta}_1 + \{m_2L_1L_2C_2 + m_2L_2^2\}\ddot{\theta}_2 - \{2m_2L_1L_2S_2\}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - \{m_2L_1L_2S_2\}\dot{\theta}_2^2 + \{m_1gLCG_1C_1 + m_2gL_1C_1 + m_2gLCG_2C_{12}\} + F_1(\dot{\theta}) \quad (2.71)$$

y

$$\tau_2 = (m_2L_1L_2c_2 + m_2L_2^2)\ddot{\theta}_1 + (m_2L_2^2)\ddot{\theta}_2 + (m_2L_1L_2c_2)\dot{\theta}_1^2 + (m_2gLCG_2c_{12}) + F_2(\dot{\theta}) \quad (2.72)$$

Lo cual podemos expresar en su forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)L_1^2 + 2m_2L_1L_2c_2 + m_2L_2^2 & m_2L_1L_2c_2 + m_2L_2^2 \\ m_2L_1L_2c_2 + m_2L_2^2 & m_2L_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2m_2L_1L_2s_2\dot{\theta}_2 & -2m_2L_1L_2s_2\dot{\theta}_2 \\ m_2L_1L_2s_2\dot{\theta}_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_1gLCG_1 + m_2gL_1c_1 + m_2gLCG_2c_{12} \\ m_2gLCG_2c_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1(\dot{\theta}) \\ F_2(\dot{\theta}) \end{pmatrix}$$

Los elementos de la matriz de inercias son:

$$H_{11} = (m_1 + m_2)L_1^2 + 2m_2L_1L_2c_2 + m_2L_2^2$$

$$H_{21} = m_2L_1L_2c_2 + m_2L_2^2$$

$$H_{12} = m_2L_1L_2c_2 + m_2L_2^2$$

$$H_{22} = m_2L_2^2$$

Los elementos de la matriz de Coriolis y fuerzas centrípetas son:

$$C_{12} = -2m_2L_1L_2s_2\dot{\theta}_2$$

$$C_{12} = -m_2L_1L_2s_2\dot{\theta}_2$$

$$C_{21} = m_2L_1L_2s_2\dot{\theta}_1$$

$$C_{22} = 0$$

Los elementos del vector de fuerzas gravitacionales son:

$$G_{11} = m_1gLCG_1 + m_2gL_1c_1 + m_2gLCG_2c_{12}$$

$$G_{21} = m_2gLCG_2c_{12}$$

Los elementos del vector de fuerzas de fricción son:

$$F_{11} = \text{Vector de fricción a modificar de acuerdo a los distintos modelos de fricción a tratar.}$$

$$F_{12} = \text{Vector de fricción a modificar de acuerdo a los distintos modelos de fricción a tratar.}$$

2.7 Influencia de la fricción en un robot manipulador

Las influencias de la fricción en un robot manipulador producen diversas fallas en los sistemas y servomecanismos, y la identificación de esta misma y su eliminación producen que sea un constante reto para los ingenieros e investigadores que se interesan por el estudio de este fenómeno.

La fricción es uno de los más grandes obstáculos en los sistemas que utilizan un posicionamiento de alta precisión, en la realización de sus distintas tareas, debido a que producen errores notorios en las ecuaciones de estado, dificultando el trabajo del control que se utiliza [1].

Además de los robots que utilizan posicionamiento de alta precisión, existen robots que realizan tareas de seguimiento de trayectorias, en este tipo de robots, la fricción juega un papel preponderante, influyendo de manera notoria, y produciendo ciclos limitados en la ejecución de tareas que el robot tiene asignadas.

La fricción arroja distintos diversos problemas en los sistemas, otra perspectiva en la que pueden ser vistas las influencias de este fenómeno, es en que la fricción al ser una fuerza que se opone al movimiento articular del robot, la energía utilizada para mover al robot será proporcional a la cantidad de fuerza de fricción, es decir que entre mayor sea la fuerza de fricción que se produce en el sistema mecánico del robot, se requerirá de una mayor concentración energética.

Por lo antes mencionado, la fricción juega un papel muy importante en el desarrollo, bienestar y durabilidad de un robot, ya que produce un desgaste en las piezas mecánicas, y por lo tanto un menor periodo de vida, por ello es de vital importancia el conocer los valores de fricción, para estimar que tanto podemos alargar la vida y mejorar el funcionamiento de un robot, ya que la fricción es un fenómeno inevitable.

2.8 Conclusiones

La fricción es un fenómeno que tiene una gran complejidad en su modelado, debido a las múltiples implicaciones que lo envuelven, produce diversos problemas en los sistemas electromecánicos de un robot. Las influencias que tiene la fricción son de gran relevancia en un robot manipulador.

Existen varios modelos que se encargan de ejemplificar el fenómeno de la fuerza de fricción, principal elemento de la tribología, ya que es un factor de desgaste, a su vez este mismo produce que se acorte la vida útil de un sistema. Los modelos pueden ser estáticos y dinámicos, aunque algunos de ellos tienen excelentes respuestas en la medición de fricción, sin embargo no existe aún una teoría completamente elaborada, esto debido a la dificultad del modelado de la fricción.

Por todas estas implicaciones que se tienen acerca de la fricción, es importante conocer la magnitud de las fuerzas que produce este fenómeno, ya que gracias a ello es posible optimizar recursos de la mejor manera, así como atenuar los efectos que lleva consigo, pero es muy importante saber que estos fenómenos nunca podrán ser completamente eliminados, ya que la fricción es un fenómeno físico inevitable.

Capítulo 3: Modelos de fricción evaluados en un sistema masa-resorte.

3.1 Introducción.

El sistema masa-resorte consiste en una masa acoplada a un resorte, en donde intervienen fuerzas como fricción y gravedad, al resorte se le aplica una pequeña fuerza de desplazamiento produciendo un movimiento armónico simple.

Es un movimiento vibratorio con aceleración variable, producido por una fuerza que se origina cuando el cuerpo se separa de su posición de equilibrio. Es un movimiento periódico de vaivén, en el que un cuerpo oscila a un lado y a otro de su posición de equilibrio en una dirección determinada y en intervalos iguales de tiempo. Una partícula sometida a este tipo de movimiento tendrá un punto central, alrededor del cual oscilará [19].

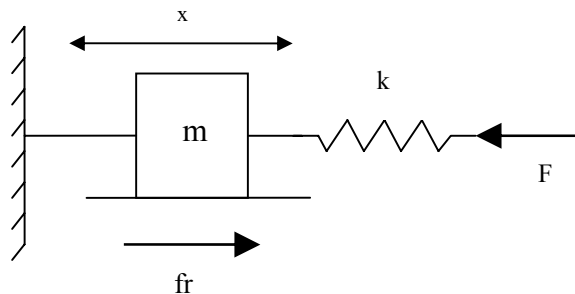


Figura 3.1: Sistema masa-resorte

Donde m es la masa o inercia del sistema, k es la constante de rigidez, fr es la fuerza de fricción que se opone al movimiento, F es la fuerza de deformación y x es el desplazamiento.

De acuerdo a la segunda ley de Newton el sistema queda definido de la siguiente manera:

$$F = M\ddot{x} + fr + kx \quad (3.1)$$

donde \ddot{x} es la aceleración lineal, x es el desplazamiento, M es la masa, k la constante de rigidez, F la fuerza de deformación y f_r la fuerza de fricción.

3.2 Sistema masa-resorte con diferentes modelos de fricción.

Del sistema descrito en figura 3.1 se ha sustituido f_r por los modelos de fricción descritos en el capítulo 2.

Se evalúan los diferentes modelos de fricción a nivel simulación para conocer la influencia en el desplazamiento y velocidad.

Modelo de fricción viscosa.

De acuerdo a la ecuación (3.1) se sustituye f_r por $f_v \dot{x}$, es decir por el modelo de fricción viscosa.

$$F = M\ddot{x} + f_v \dot{x} + kx \quad (3.2)$$

Las condiciones de simulación se definen a continuación:

$m = 1$
 $k = 2$;
 $f_v = 0.4$
 $F = k * u$
 $u = 0.5$

Condiciones iniciales:
 $x(0) = 0$
 $\dot{x}(0) = 0$
integrador de Matlab ODE 45
Tiempo de simulación: 50 seg.
Paso de integración: 0.1 mseg.

Donde m , k , F , condiciones iniciales, integrador de Matlab, paso de integración son los mismos parámetros para todas las simulaciones de este capítulo.

El comportamiento del sistema se muestra en las siguientes gráficas.

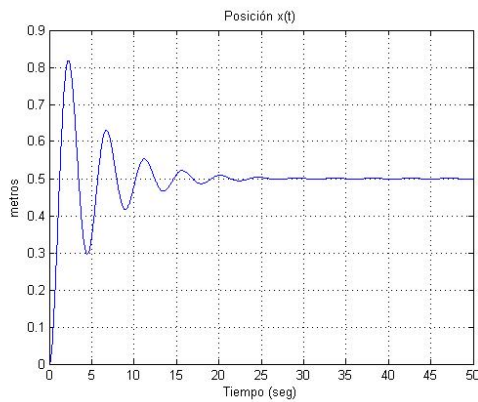


Fig. 3.2: Simulación de la posición con fricción viscosa.

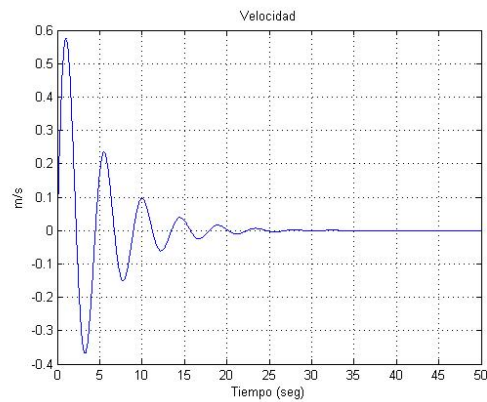


Fig. 3.3: Simulación de la velocidad con fricción viscosa.

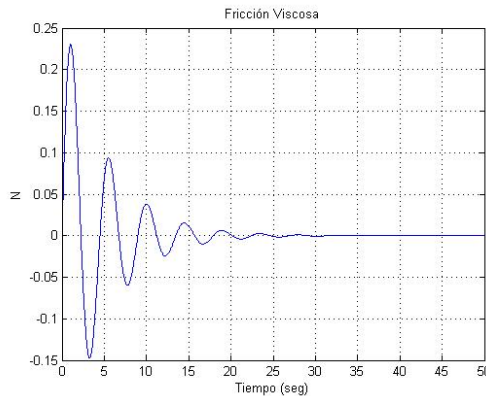


Fig. 3.4: Simulación del modelo de fricción viscosa.

La posición comienza oscilando debido a que al sistema se le aplica una fuerza externa y provoca movimiento oscilatorio hasta que toda la energía es disipada. Mientras que la velocidad tiene el mismo comportamiento oscilatorio, esto mientras el sistema no entra en reposo, y como la fricción es dependiente de la velocidad su comportamiento es proporcional a ésta.

Modelo de fricción de Coulomb.

Para el modelo de fricción de Coulomb se cambia fr por $fc \operatorname{sgn}(\dot{x})$.

$$F = M\ddot{x} + fc \operatorname{sgn}(\dot{x}) + kx \quad (3.3)$$

Función signo. Tiene un valor positivo cuando el argumento es mayor a cero, mientras que toma valores negativos cuando éste es menor a cero, y en cero existe una indeterminación.

$$\operatorname{sgn}(v) = \begin{cases} v > 0 \rightarrow 1 \\ v = 0 \rightarrow \text{indeterminación} \\ v < 0 \rightarrow -1 \end{cases} \quad (3.4)$$

Tal como se muestra en la siguiente gráfica.

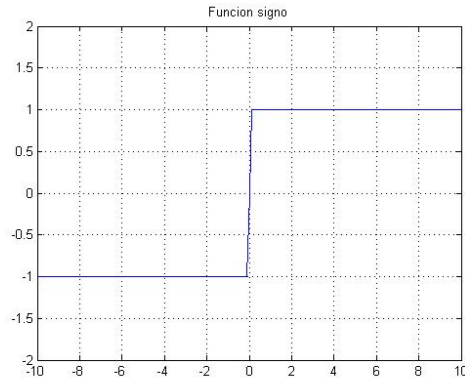


Fig. 3.5: Función signo.

Para fines de simulación se ha sustituido la función signo por tangente hiperbólica, pues es una aproximación de la función signo, pero si indeterminación en cero, definida de esta manera:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \tanh(\beta v) = \operatorname{sgn}(v) \quad (3.5)$$

donde β es una constante

En la siguiente figura se muestra la simulación de la tangente hiperbólica:

$$\tanh = (10 * t)$$

Donde $t = \{-10 \dots 10\}$

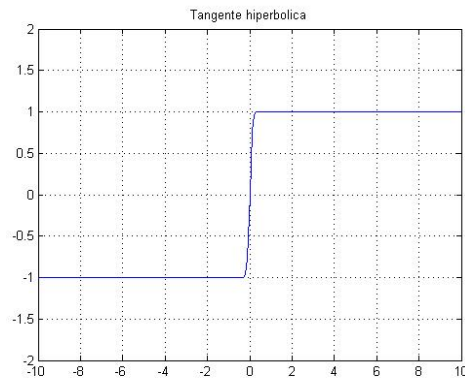


Fig. 3.6: Tangente hiperbólica.

Mientras β sea mayor la tangente hiperbólica se aproxima de mejor manera a la función signo, con esta respuesta se evita una indeterminación en cero y constituye una señal continua.

Las condiciones de simulación para éste modelo de fricción se definen a continuación:

$$f_c = 0.4$$

Tiempo de simulación: 50 seg.
 $\beta=30$

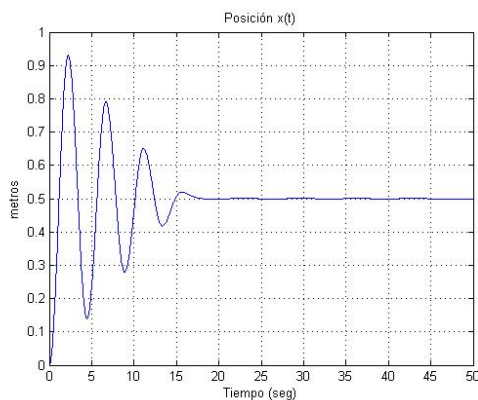


Fig. 3.7 Simulación de la posición con fricción de Coulomb.

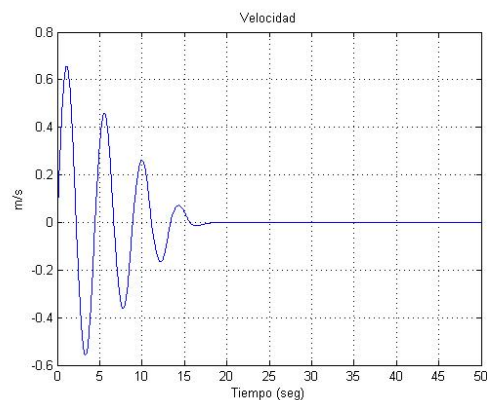


Fig. 3.8: Simulación de la velocidad con fricción de Coulomb.

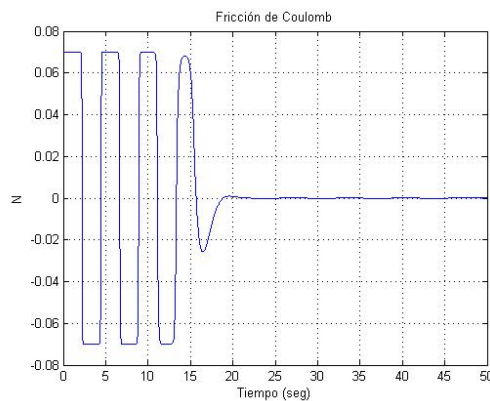


Fig. 3.9: Simulación del modelo de fricción de Coulomb.

La posición tiene un valor máximo mayor al que se aprecia en la posición en la simulación del modelo de fricción viscosa, la velocidad se rige bajo un comportamiento similar mientras que en la gráfica de la fricción se aprecia claramente un cambio de un valor positivo a un valor negativo debido a la tangente hiperbólica.

La fuerza de fricción se extingue al llegar al estado de equilibrio (reposo).

Modelo de fricción viscosa y de Coulomb.

Las condiciones iniciales de la simulación del siguiente modelo se definen a continuación:

$$\begin{aligned}
 f_c &= 0.07 \\
 f_v &= 0.04 \\
 \beta &= 30 \\
 \text{Tiempo de simulación: } &50 \text{ seg.}
 \end{aligned}$$

La ecuación a modelar se define así:

$$F = M\ddot{x} + f_v(\dot{x}) + f_c \operatorname{sgn}(\dot{x}) + kx \quad (3.6)$$

El comportamiento de la fricción seca y de Coulomb se aprecia con claridad en las siguientes gráficas.

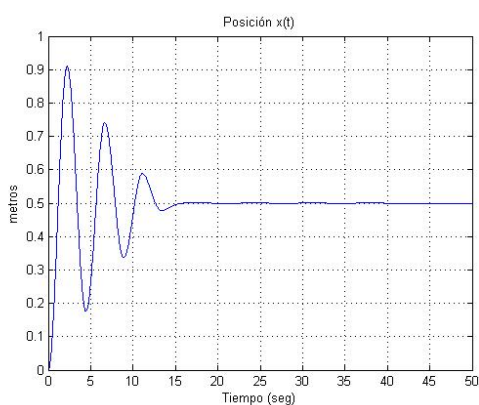


Fig. 3.10: Simulación de posición con fricción viscosa y Coulomb.

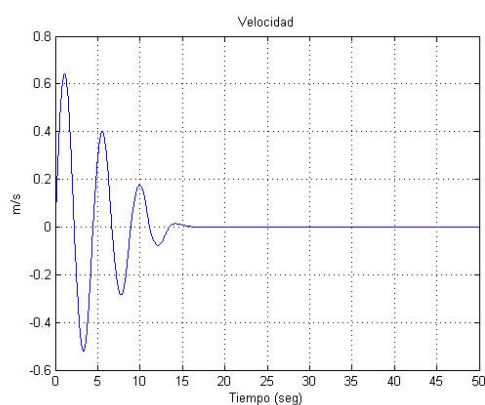


Fig. 3.11: Simulación de velocidad con fricción viscosa y Coulomb.

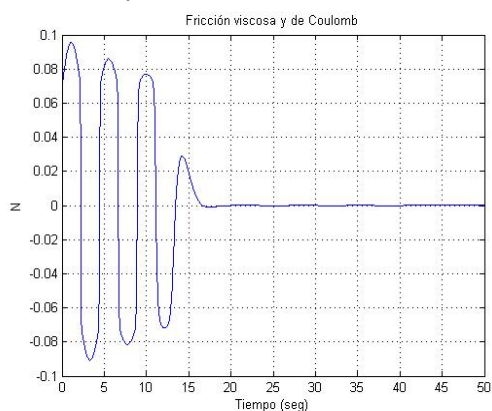


Fig. 3.12: Simulación del modelo de fricción viscosa y de Coulomb

Se aprecia la influencia de la fuerza de fricción en el comportamiento de la señal, su factor de forma (Fig. 3.12) se define en sus máximos y mínimos con relación al factor de forma en Fig. 3.9.

Modelo del efecto Stribeck.

La ecuación a simular se define a continuación donde se ha cambiado f_r de la ecuación (3.1) por F .

$$F = fc + (fs - fc)e^{\left(\frac{|\dot{x}|}{vs}\right)^{\sigma_s}} + fv(\dot{x})\dot{x} \quad (3.7)$$

Donde fc es el coeficiente de fricción de Coulomb, fs es el coeficiente de fricción de Stribeck, fv es el coeficiente de fricción viscosa, \dot{x} es la velocidad lineal.

La función neperiana o exponencial $e^{(\cdot)}$ tiene un comportamiento que depende directamente su paridad, si esta es par su comportamiento se asemeja al de la campana de Gauss, y cuando es impar se comporta como una exponencial, como se puede apreciar en la siguiente figura.

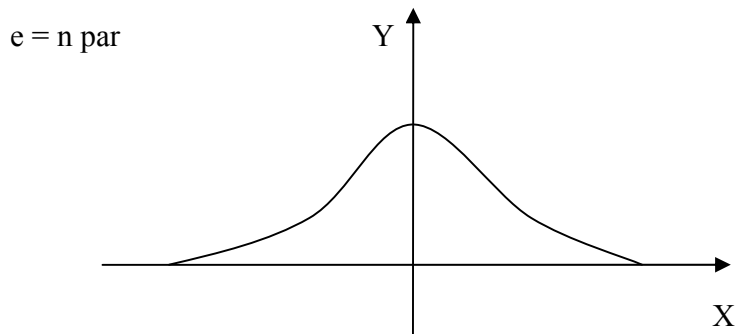


Fig. 3.13: Comportamiento de la exponencial cuando $x = n$ par [22].

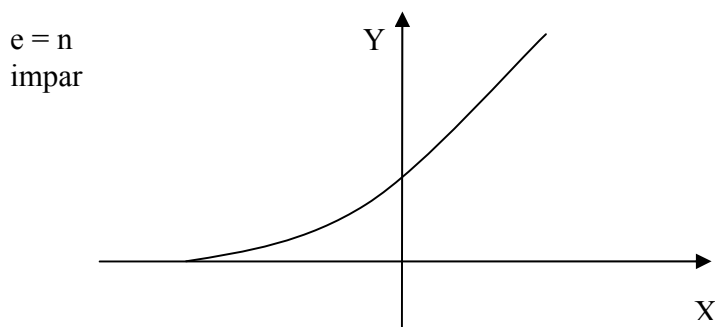


Fig. 3.14: Comportamiento de la exponencial cuando $x = n$ impar [23].

Debido a este comportamiento se ha definido a σ_s como número par y bajo esta condición la fricción solo esta activa en velocidades bajas como se puede apreciar en la Fig. 3.13.

Las condiciones que se propusieron para este modelo son las siguientes:

$F_s=0.5$
 $F_c=0.25$
 $V_s=.01$
 $f_v=0.244$
 $\sigma_s=1$
Tiempo de simulación: 100 seg.

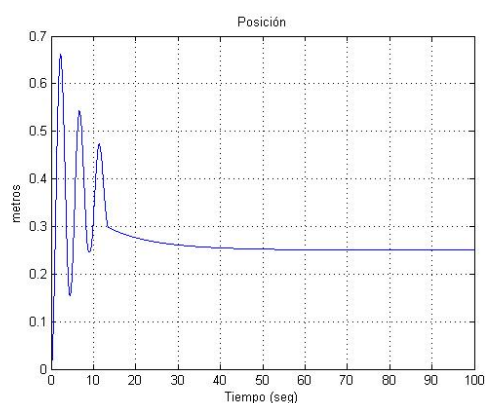


Fig. 3.15: Simulación de la posición con el efecto Stribeck.

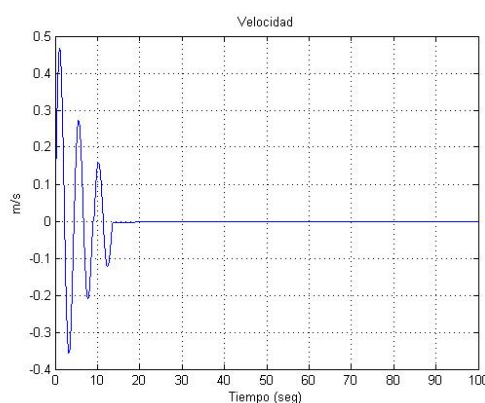


Fig. 3.16: Simulación de la velocidad con el efecto Stribeck.

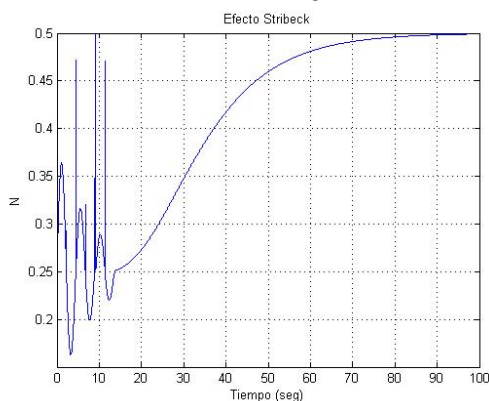


Fig. 3.17: Simulación del efecto Stribeck.

En las gráficas anteriores podemos apreciar que la posición oscila llegando a un valor pico de de 0.68 m aproximadamente y suavemente se estabiliza, mientras que la velocidad oscila y se estabiliza en cero rápidamente. El efecto Stribeck debido a que tiene influencia solo en valores bajos de velocidad, influye más cuando la velocidad es baja y su influencia es menos cuando la velocidad incrementa por lo que incrementa cuando la velocidad es cero tomando un valor aproximadamente de 0.5 N.

Modelo de fricción de Dahl.

La ecuación que se sustituye es la del modelo de Dahl que se muestra a continuación:

$$\frac{dFr}{dt} = \sigma \dot{q} - \frac{Fr}{fc} |\dot{q}| \quad (3.8)$$

Sustituyendo resulta la siguiente ecuación:

$$F = M\ddot{x} + \int \left(\sigma \dot{x} - \frac{Fr}{fc} |\dot{x}| \right) dt + kx \quad (3.9)$$

Los parámetros de simulación, para este modelo esta descrito a continuación.

$$Fc = .2$$

$$\sigma_s = 0.5$$

Tiempo de simulación: 60 seg.

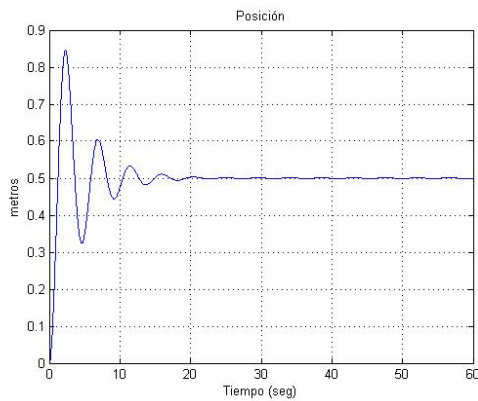


Fig. 3.18: Simulación de la posición con fricción de Dahl

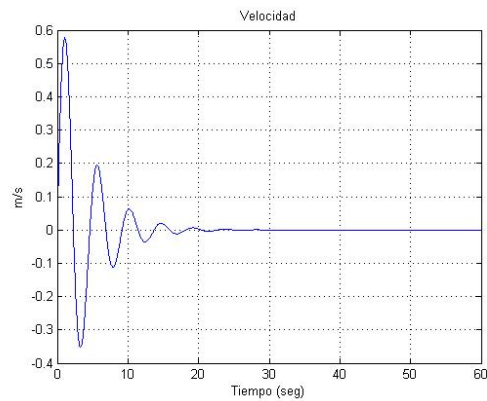


Fig. 3.19: Simulación de la velocidad con fricción de Dahl.

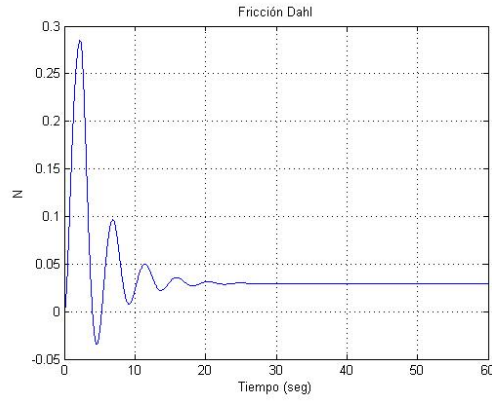


Fig. 3.20: Simulación de la fricción de Dahl.

En las simulaciones anteriores se puede apreciar que la posición oscila teniendo estabilidad en aproximadamente 60 segundos, con un valor máximo de 0.8 metros, mientras que la velocidad tiene un sobre impulso de 0.7 m/s y su estabilidad es más pronta, la fricción tiene un comportamiento similar a la velocidad llegando a un valor pico de 0.28 N.

Modelo de fricción de Lugre.

Las simulaciones que se muestran a continuación son sujetas a la configuración siguiente:

$$\frac{dz}{dt} = \dot{x} - \left| \frac{\dot{x}}{g(v)} \right| z \quad (3.10)$$

$$g(v) = \frac{fc + (fs - fc)e^{-\left(\frac{\dot{x}}{vs}\right)^2}}{\sigma_0} \quad (3.11)$$

$$F = \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt} + \sigma_2 \dot{x} \quad (3.12)$$

$$F = M\ddot{x} + \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt} + \sigma_2 \dot{x} + kx \quad (3.13)$$

Las condiciones de simulación se detallan a continuación:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= 10^{-5}; \\ \sigma_1 &= \sqrt{10^{-5}} \\ \sigma_2 &= 0.4 \end{aligned}$$

$F_s=1.5$;
 $F_c=1$;
 $V_s=.001$ Tiempo de simulación: 20 seg.

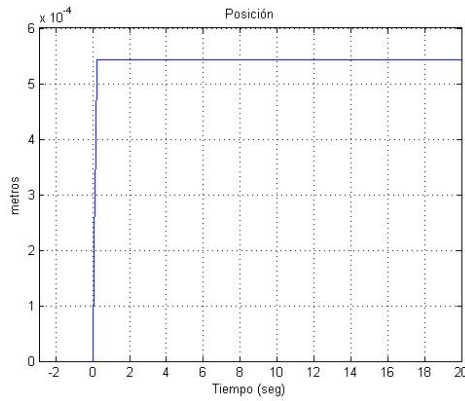


Fig. 3.21: Simulación de la posición con fricción de Luge.

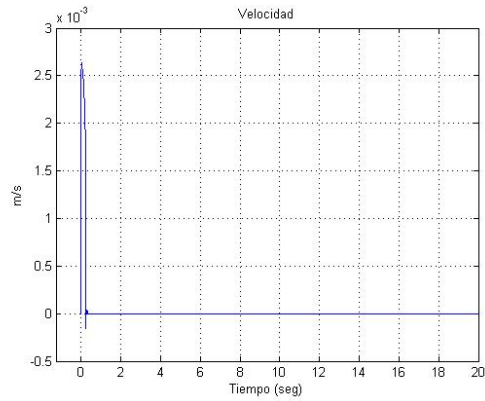


Fig. 3.22 Simulación de la velocidad con fricción de Luge.

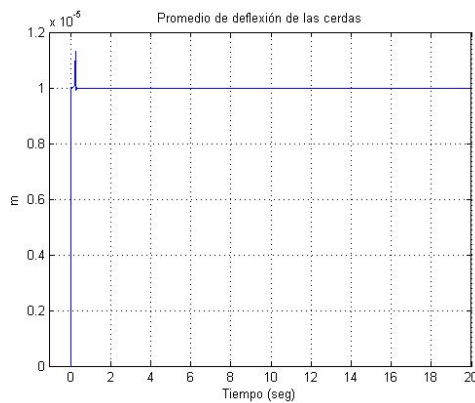


Fig. 3.23: Promedio de deflexión de las cerdas.

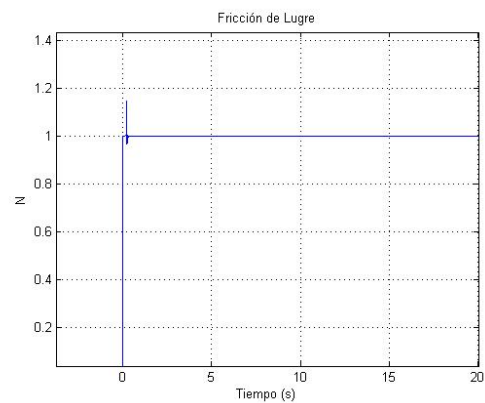


Fig. 3.24: Simulación de la fricción de Luge.

En las gráficas anteriores podemos apreciar que la posición se estabiliza en aproximadamente 0.25 segundos y la velocidad en ese instante es cero pues el sistema entro en estado de reposo, un poco antes de 0.25 segundos se aprecia en la gráfica de la fricción de Luge un impulso pequeño eso es debido a que la velocidad es baja en ese punto por lo tanto hay una respuesta por el efecto Stribeck que se encuentra dentro del modelo de fricción de Luge.

Modelo de fricción de Maxwell.

Este modelo incluye una condición para el estado z , la cual dice que si el sistema esta en reposo, la fricción plantea un comportamiento distinto, que cuando se está en movimiento.

En estado de reposo.

$$\frac{dz}{dt} = \dot{x} \quad (3.14)$$

En movimiento..

$$\frac{dz}{dt} = \tanh(\beta\dot{q}) \left(1 - \frac{z}{s}\right) \quad (3.15)$$

La fricción de Maxwell.

$$F = mz + \sigma \frac{dz}{dt} + \dot{x} \quad (3.16)$$

Aplicando este modelo al sistema masa-resorte, el sistema se rige bajo las siguientes condiciones:

$$F = M\ddot{x} + mz + \sigma \frac{dz}{dt} + \dot{q} + kx \quad (3.17)$$

Las condiciones iniciales para la siguiente simulación son las siguientes:

$\beta = 30$;
 $\sigma = .005$;
 $c = .25$;
 $s = .024$
Tiempo de simulación: 40 seg.

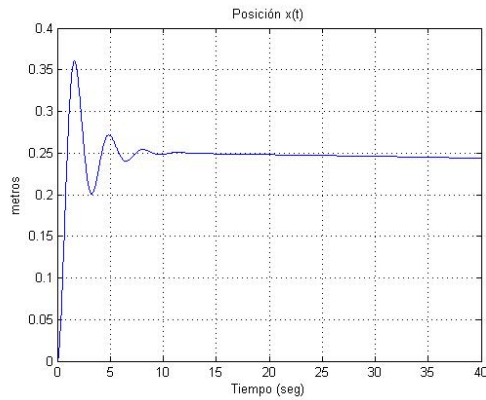


Fig. 3.25: Simulación de la posición con fricción de Maxwell.

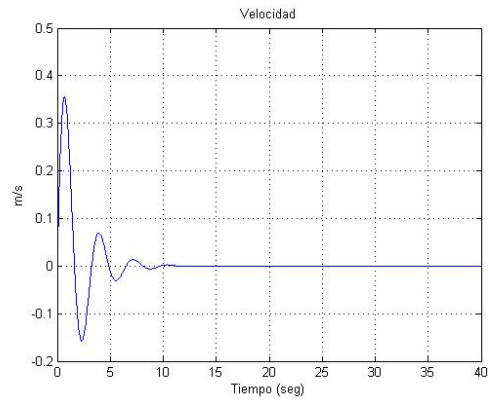


Fig. 3.26: Simulación de la velocidad con fricción de Maxwell.

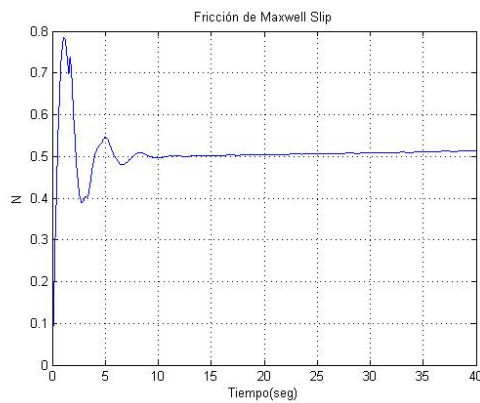


Fig. 3.27: Simulación de la fricción de Maxwell.

Se puede apreciar en las gráficas anteriores un comportamiento distinto de la posición y velocidad, hay una oscilación al principio de la simulación para después estabilizarse, la velocidad se vuelve cero mientras que la posición decae hacia cero, la fricción de Maxwell incrementa mientras la posición decae, esto nos muestra que la fricción de Maxwell no depende directamente de la velocidad

3.3 Conclusiones.

Se puede decir que para la mayoría de los sistemas en movimiento la fricción tiene una influencia considerable, ya que no solo es una fuerza disipativa que provoca desgaste de las partes en contacto y un consumo mayor de energía si no que también afecta el desempeño, al alterar la posición y velocidad del sistema por tal razón no debe ser una variable despreciable.

En la medida en que se puede conocer de forma acertada el fenómeno de fricción se pueden tomar en consideración que el comportamiento verdadero de la fricción sólo se aproximar mediante el modelo más complejo, el cual toma en consideración factores importantes, tales como la fricción estática, dinámica, el efecto Stribeck, y una condición para cuando el sistema está en reposo, y cuando se inicia un desplazamiento.

Mediante la evaluación de los modelos de fricción en el sistema masa-resorte se conoce el comportamiento de la fricción así como su valor, es decir la cantidad de fuerza que se opone al movimiento, esto nos da una idea de la energía que se disipa cuando los cuerpos están en contacto, algo inevitable en sistemas electromecánicos por mencionar un ejemplo

Capítulo 4: Modelos de fricción en un robot de dos grados de libertad.

4.1 Introducción.

Los robots manipuladores son sistemas mecánicos articulados formados por eslabones conectados entre sí a través de uniones o articulaciones. Las articulaciones son básicamente de dos tipos rotacionales y trasnacionales. Cada unión se controla independientemente a través de un actuador, que se coloca generalmente en dicha unión y el movimiento de las uniones provoca un movimiento relativo en las articulaciones [16].

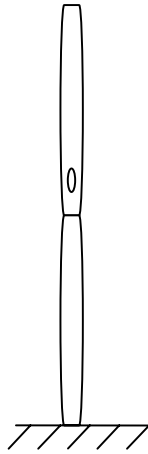
La fricción es una fuerza opuesta al movimiento, la cual disipa energía, por lo tanto el poder conocerla es una herramienta importante en el diseño de sistemas. Por tal razón se han desarrollado modelos los cuales predicen el comportamiento de la fricción, estos modelos los hemos evaluado en un robot de dos grados de libertad, para tener una idea más clara y concreta del comportamiento de la fricción.

4.2 Formulación Euler-Lagrange.

Las ecuaciones de un robot manipulador pueden obtenerse a partir de las ecuaciones de movimiento de Newton. El inconveniente que presenta este método es que el análisis se complica notablemente, cuando aumenta el número de articulaciones del robot [16]. En esos casos, es conveniente emplear las ecuaciones de movimiento de Lagrange como se observa en el Capítulo 2.

4.3 Configuración del robot de dos grados de libertad.

El robot se ha simulado en lazo abierto, es decir sin la influencia de un control, por lo tanto lo que lo lleva a estabilizarse es la fuerza gravitatoria y la fuerza de fricción que actúan directamente sobre los eslabones y los actuadores, cuando estos caen y tienen un movimiento pendular, como se puede apreciar en las siguientes figuras (4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 y 4.6).



Condición inicial $\pi/2$

Fig. 4.1: Condición inicial R2GL

A la condición inicial se le agrega un incremento angular para que se inicie movimiento.



Condición inicial $\pi/2+1^\circ$

Fig. 4.2: Condición inicial más un incremento angular.

La fuerza de gravedad provoca que los eslabones caigan y comiencen a moverse.

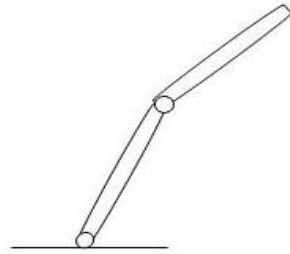


Fig. 4.3: Primer movimiento de los eslabones.

Continúan cayendo e incrementando su velocidad.

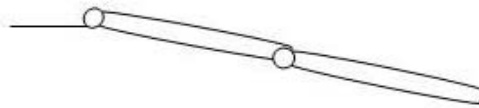


Fig. 4.4: Segundo movimiento de los eslabones.

Se continúa con movimiento de manera de un péndulo.

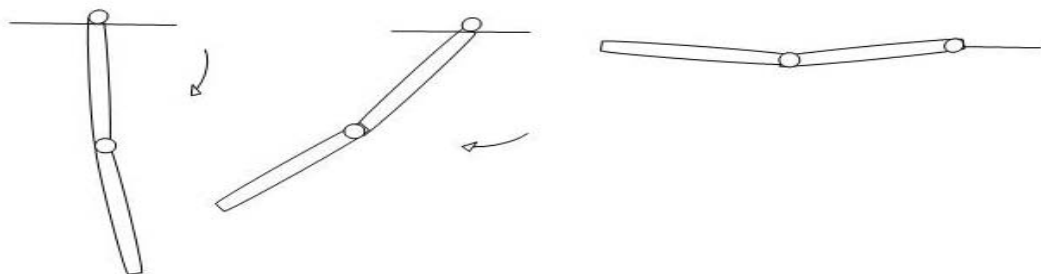


Fig. 4.5 Movimiento pendular.

El robot se mantiene oscilando de manera de un péndulo hasta que debido a la fuerza gravitatoria y la fuerza de fricción se estabiliza, después de haberse disipado la energía

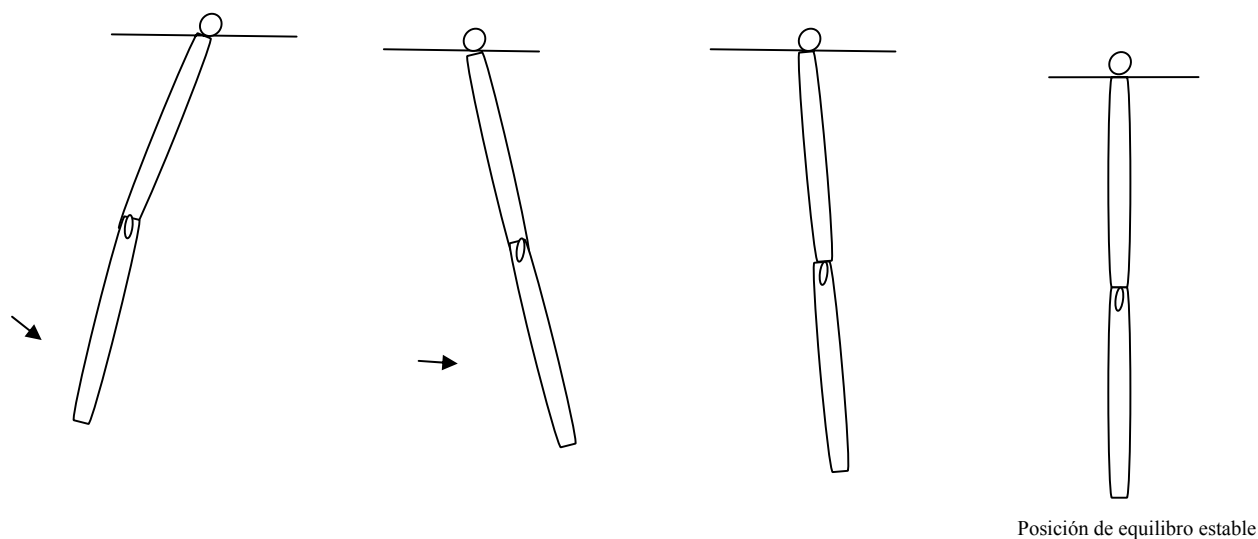


Fig. 4.6: Estabilidad del robot.

4.4 Evaluación de los modelos de fricción.

Como lo hemos visto anteriormente un robot esta sujeto a fenómenos físicos, tales como gravedad, inercia, fricción, fuerzas centrípetas, fuerzas de Coriolis, y que para iniciar un movimiento se necesita una influencia exterior es decir una fuerza. Por tal razón podemos decir que el modelo de un robot esta descrito como se muestra en la ecuación (2.44).

Se ha sustituido el vector de fuerzas de fricción para cada uno de los modelos de fricción ya vistos en capítulos anteriores y se hace un análisis de su comportamiento de acuerdo a su posición, velocidad y fricción para cada actuador.

Modelo de Fricción viscosa.

Las condiciones iniciales para las simulaciones de los modelos de fricción evaluados en el robot de dos grados de libertad se muestran a continuación:

Masa del eslabón 1 m1=0.8293	Longitud al centro de mas del eslabón 2 lc2=0.1635
Masa del eslabón 2 m2=0.3402	Inercia del eslabón 1 I1=0.005
Longitud del eslabón 1 l1=0.2032	Inercia del eslabón 2 I2=0.0043
Longitud del eslabón 2 l2=0.3841	Coefficientes de fricción v1=0.245;v2=0.27
Longitud al centro de mas del eslabón 1 lc1=0.1551	Gravedad g = 9.8
Tiempo de simulación: 10 seg.	Paso de integración: 0.1 mseg.
Tipo de integrador: ODE 45	Condiciones iniciales: x(0)=π/2+0.2 ẋ(0)=0 x(1)=0 ẋ(1)=0

Las condiciones anteriores son utilizadas en todas las simulaciones, excepto los coeficientes de fricción y el tiempo de simulación.

La ecuación de fricción a sustituir en el vector de fuerzas de fricción es la que se muestra a continuación:

$$F = fv(\dot{q}) \tag{4.6}$$

Primer eslabón y actuador.

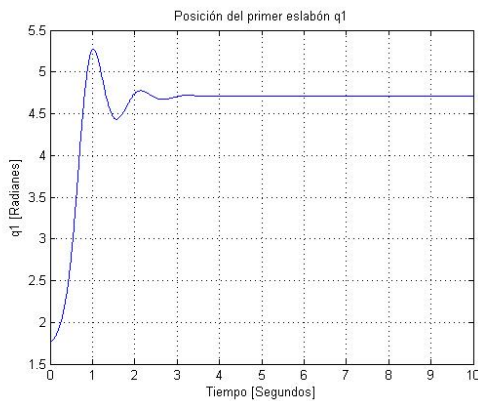


Fig. 4.7: Simulación de posición con fricción viscosa primer eslabón.

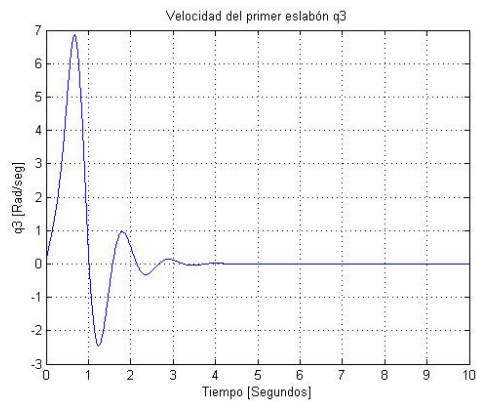


Fig. 4.8: Simulación de velocidad con fricción viscosa primer eslabón.

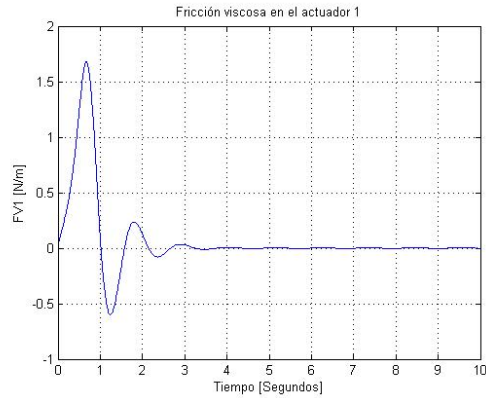


Fig. 4.9: Simulación de la fricción viscosa primer actuador.

La posición tiene un pequeño sobre impulso para después estabilizarse en aproximadamente tres segundos, es decir cae inmediatamente, por ende la velocidad responde a este comportamiento, mientras que la fricción, tiene un sobre impulso menor de aproximadamente 1.7 N lo que es normal para el sistema pues la fricción, es de menor amplitud.

Segundo eslabón y actuador.

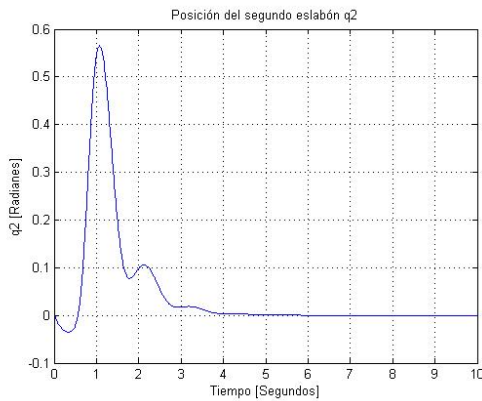


Fig. 4.10: Simulación de posición con fricción viscosa segundo eslabón.

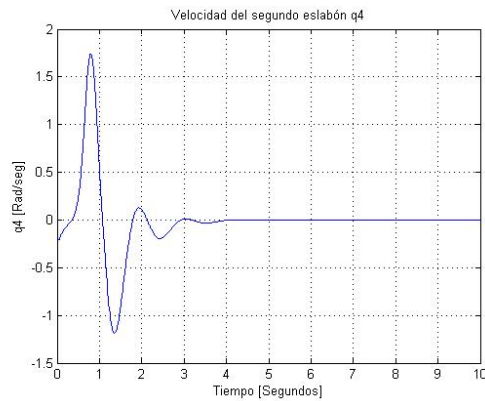


Fig. 4.11: Simulación de velocidad con fricción viscosa en segundo eslabón.

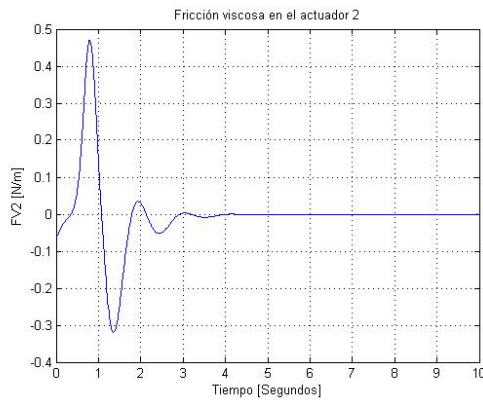


Fig. 4.12: Simulación de fricción viscosa en el segundo actuador.

En las gráficas (4.10, 4.11, 4.12) se puede observar que la posición tiene una pequeña caída antes de iniciar un incremento rápido hasta aproximadamente 0.55 m y en el descenso, se produce un cambio de signo en la velocidad, de la misma manera que en la fricción.

Modelo de fricción de Coulomb.

Las condiciones iniciales para la siguiente simulación se definen a continuación, sabiendo que algunos parámetros ya fueron definidos anteriormente sólo se definen los parámetros que son necesarios especificar.

Tiempo de simulación: 10 seg.
Coefficientes de fricción de coulomb
c1=0.69
c2=0.75
$\beta = 30$

La ecuación a sustituir se define de la siguiente forma:

$$F = fc \operatorname{sgn}(\dot{q}) \quad (4.7)$$

Primer eslabón y actuador.

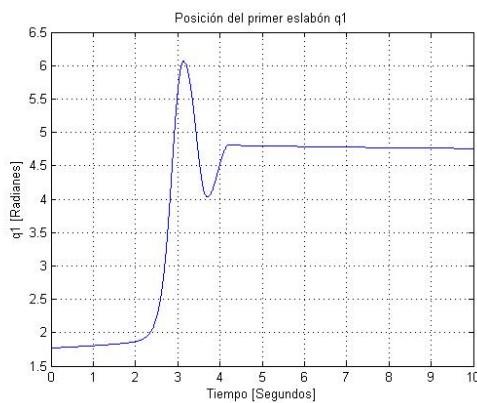


Fig. 4.13: Simulación de posición con fricción de Coulomb primer eslabón.

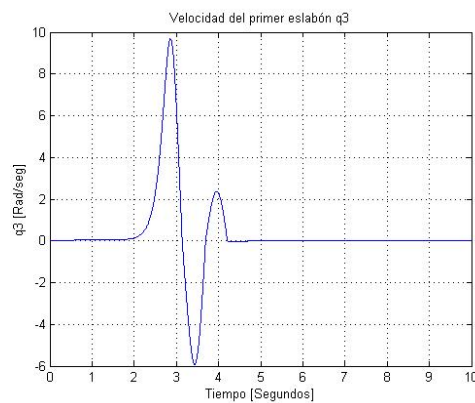


Fig. 4.14: Simulación de velocidad con fricción de Coulomb primer eslabón.

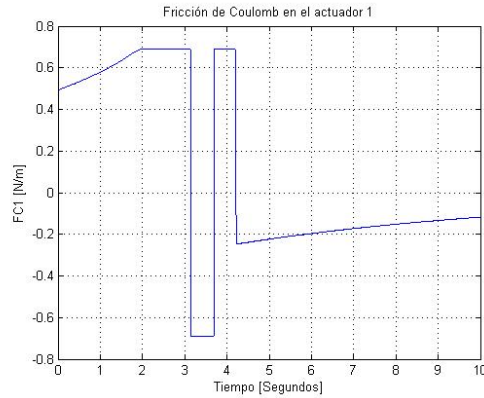


Fig. 4.15: Simulación de fricción de Coulomb en el primer actuador.

Las gráficas anteriores muestran que la posición se estabiliza en un valor de aproximadamente 4.8 radianes, mientras que la fricción es positiva en un instante, y negativa en otro debido al cambio de signo de la velocidad.

Segundo eslabón y actuador.

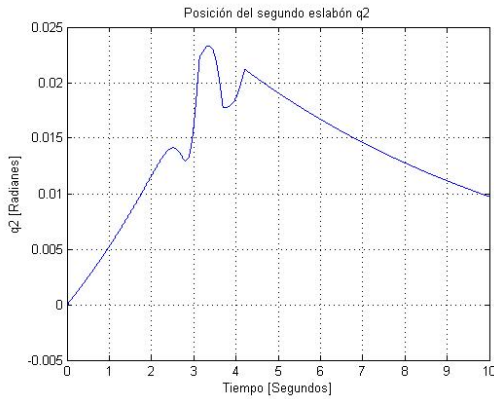


Fig. 4.16: Simulación de posición con fricción de Coulomb segundo eslabón.

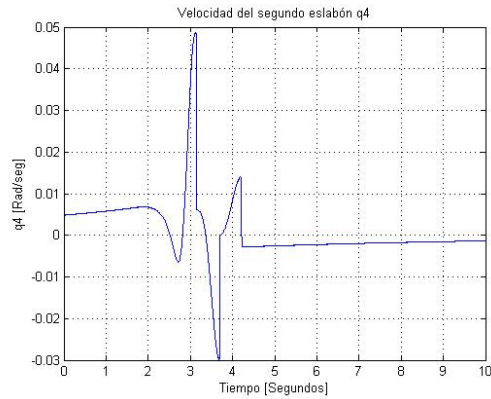


Fig. 4.17: Simulación de velocidad con fricción de Coulomb segundo eslabón.

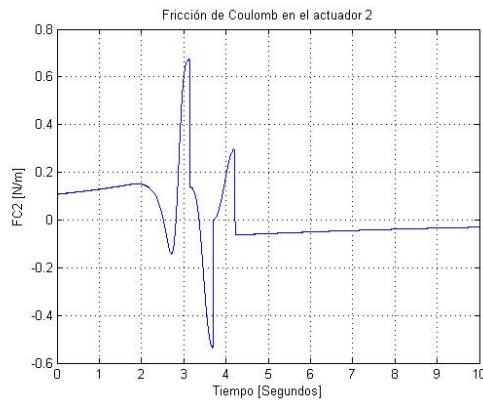


Fig. 4.18: Simulación de fricción de Coulomb en el segundo actuador.

El comportamiento de la simulación anterior es distinto, pues comienza con un incremento en posición, pero después un instante desciende y repite su comportamiento hasta que se estabiliza. La velocidad repite su comportamiento pero con mayor frecuencia, mientras que la fricción se encuentra entre un valor positivo y un valor negativo debido a que depende de la velocidad.

Modelo de fricción viscosa y de Coulomb.

Las condiciones de simulación que definen el comportamiento de la fricción se definen de la siguiente manera:

Tiempo de simulación: 80 seg.
Coefficientes de fricción de Coulomb
$c1=0.69$
$c2=0.75$
$\beta =30$

Se substituye la siguiente ecuación:

$$F = fv(\dot{q}) + fc \operatorname{sgn}(\dot{q}) \quad (4.8)$$

Primer eslabón y actuador.

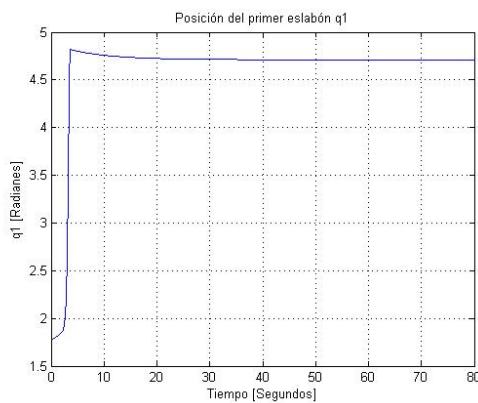


Fig. 4.19: Simulación de posición con fricción viscosa y Coulomb primer eslabón

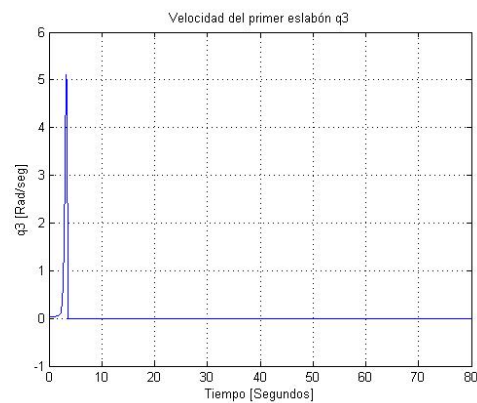


Fig. 4.20: Simulación de velocidad con fricción viscosa y Coulomb primer eslabón

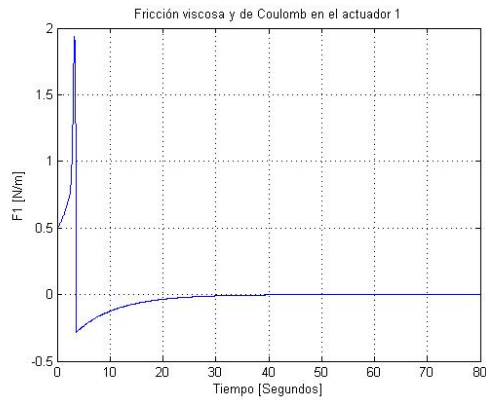


Fig. 4.21: Simulación de fricción viscosa y Coulomb primer actuador

Se puede observar en las gráficas anteriores que al agregar los modelos de fricción viscosa y Coulomb se produce una menor oscilación y la estabilidad es más pronta, aunque es tiempo de simulación es mayor, a comparación de estos modelos simulados por separado.

Segundo eslabón y actuador.

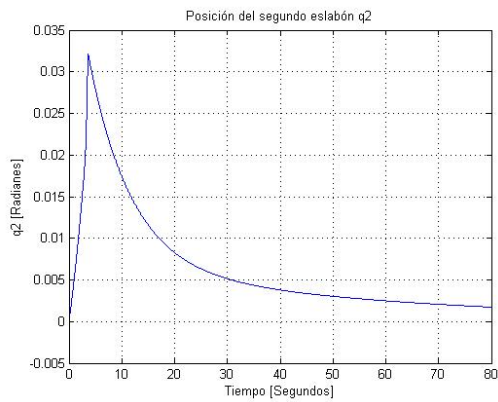


Fig. 4.22: Simulación de posición con fricción viscosa y Coulomb segundo eslabón.

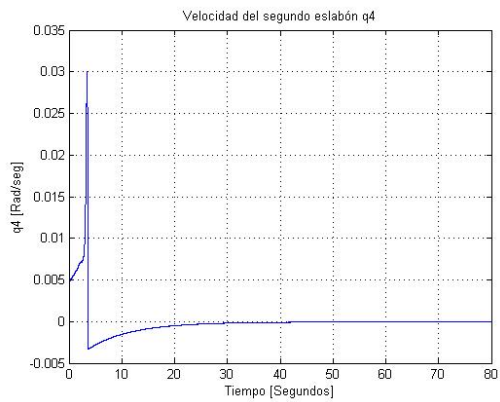


Fig. 4.23: Simulación de velocidad con fricción viscosa y Coulomb segundo eslabón.

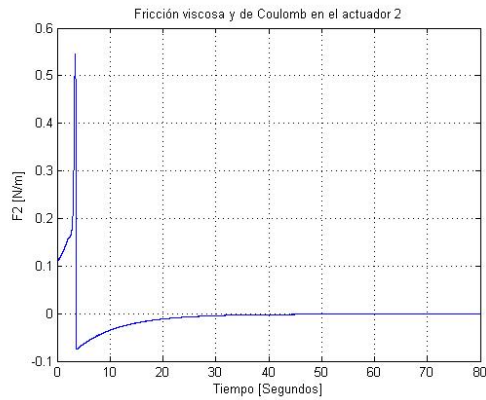


Fig. 4.24: Simulación de fricción viscosa y Coulomb segundo actuador.

En las gráficas anteriores aprecia un sobre impulso en la posición, para posteriormente ocurra una caída en la velocidad llegando a ser negativa por un instante, por lo que la fricción sufre este cambio de signo también.

Efecto Stribeck.

Se definen las condiciones de simulación de la siguiente manera:

$F_s = 0.53$	$f = 0.042$
$F_c = 0.35$	$\sigma_s = 2$
Tiempo de simulación: 80 seg.	Velocidad de Stribeck $V_{s1} = .0018$

La fórmula sustituida en el vector de fuerzas disipativas en este caso es:

$$F = fc + (fs - fc)e^{-\frac{|\dot{q}|}{V_{s1}}} + fv(\dot{q})\dot{q} \quad (4.9)$$

Primer eslabón y actuador.

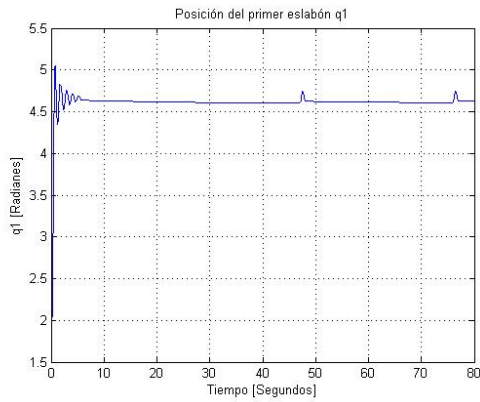


Fig. 4.25: Simulación de posición con el efecto Stribeck primer eslabón.

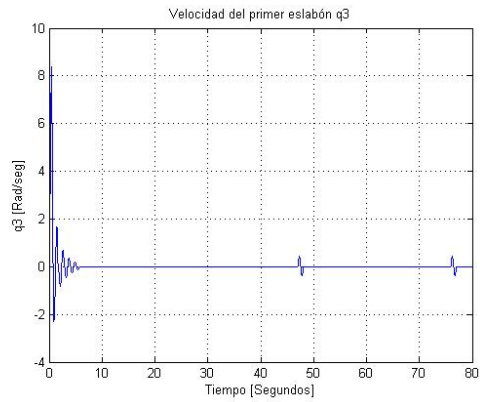


Fig. 4.26: Simulación de velocidad con el efecto Stribeck primer eslabón.

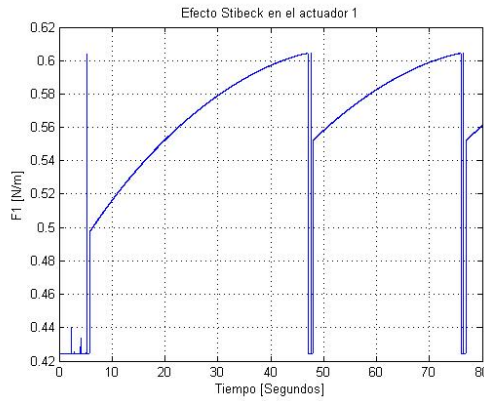


Fig. 4.27: Simulación del efecto Stribeck primer actuador.

Se observa en las gráficas anteriores, que la posición y la velocidad se estabiliza en aproximadamente 10 seg. El efecto Stribeck incrementa cuando la velocidad es cero, dado que está presente sólo a valores bajos de velocidad.

Segundo eslabón y actuador.

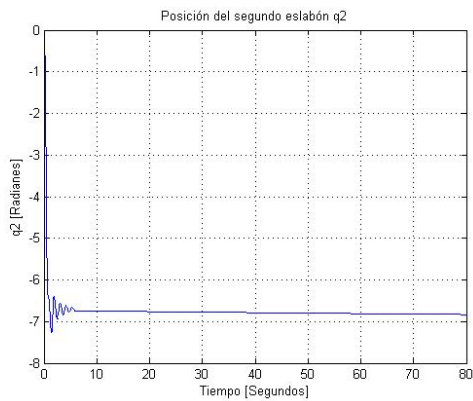


Fig. 4.28: Simulación de posición con el efecto Stribeck segundo eslabón.

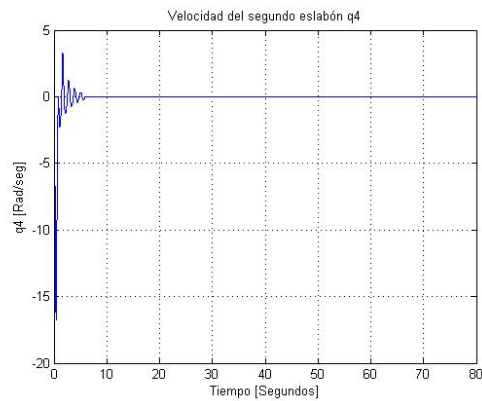


Fig. 4.29: Simulación de velocidad con el efecto Stribeck segundo eslabón.

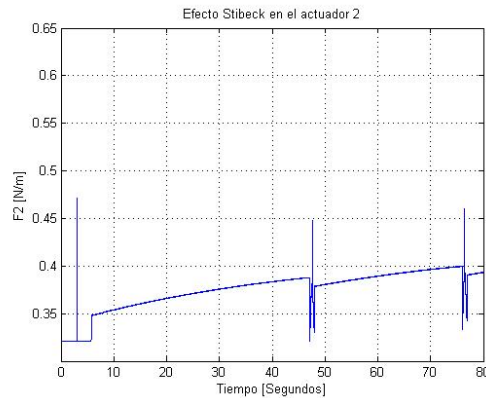


Fig. 4.30: Simulación del efecto Stribeck segundo actuador.

Existe un comportamiento similar al del primer eslabón excepto que la velocidad se comporta de manera negativa, lo cual no afecta el comportamiento del efecto Stribeck aunque la velocidad sea negativa sigue tomando valores altos, en ese instante el efecto Stribeck es despreciable, por lo contrario cuando la velocidad se acerca a cero, el efecto Stribeck tiene una influencia importante.

Modelo de fricción de LuGre.

Las condiciones iniciales de ésta simulación se definen a continuación:

$F_c = .1$	$\sigma_0 = 10^5$
$V_s = .001$	$\sigma_1 = \sqrt{10^{-5}}$
$F_s = .15$	$\sigma_2 = 0.4$
Tiempo de simulación: 20 seg.	

Se sustituye la siguiente ecuación en el vector de fuerzas de fricción.

$$\frac{dz}{dt} = \dot{q} - \left| \frac{\dot{q}}{g(v)} \right| z \quad (4.10)$$

donde $g(v)$ se define de esta manera:

$$g(v) = \frac{fc + (fs - fc)e^{-\left(\frac{\dot{q}}{v_s}\right)^2}}{\sigma_0} \quad (4.11)$$

La fricción de LuGre es descrita por la ecuación 4.12

$$F = \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt} + \sigma_2 \dot{q} \quad (4.12)$$

Primer eslabón y actuador.

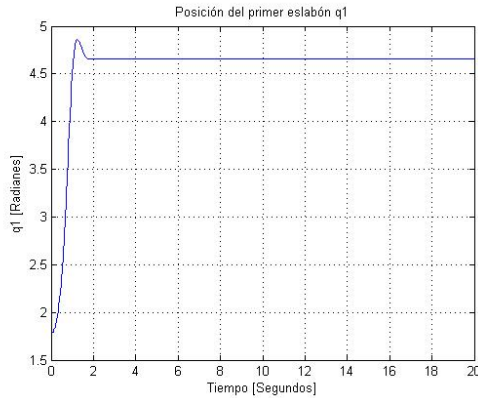


Fig. 4.31: Simulación de posición con fricción de LuGre primer eslabón.

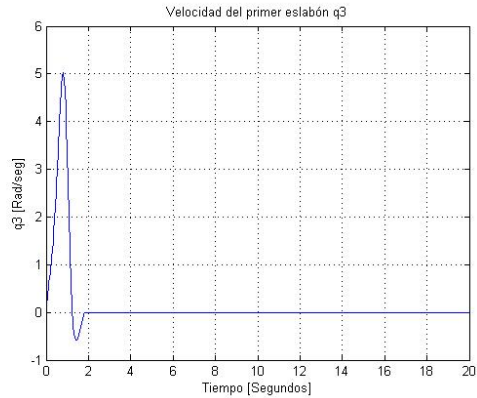


Fig. 4.32: Simulación de velocidad con fricción de LuGre primer eslabón.

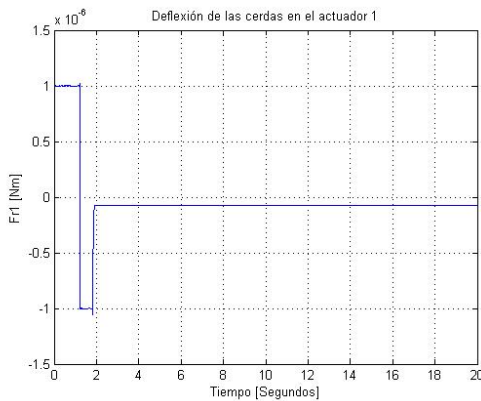


Fig. 4.33: Promedio de deflexión de las cerdas primer actuador

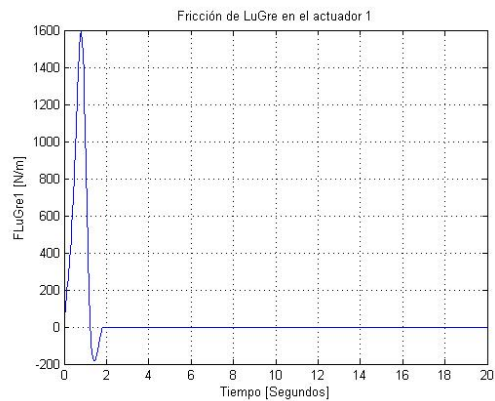


Fig. 4.34: Simulación de la fricción de LuGre primer actuador.

En las gráficas anteriores se puede observar que cuando sucede un incremento en la velocidad lo hay también en la fricción, un factor más que existe es el promedio de deflexión que hay en las cerdas, el cual se mantiene constante mientras hay movimiento.

Segundo eslabón y actuador.

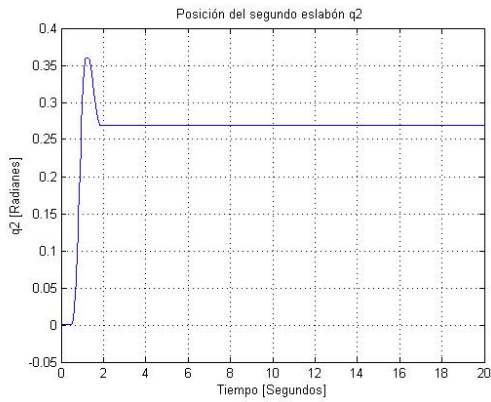


Fig. 4.35: Simulación de posición con fricción de Lure segundo eslabón.

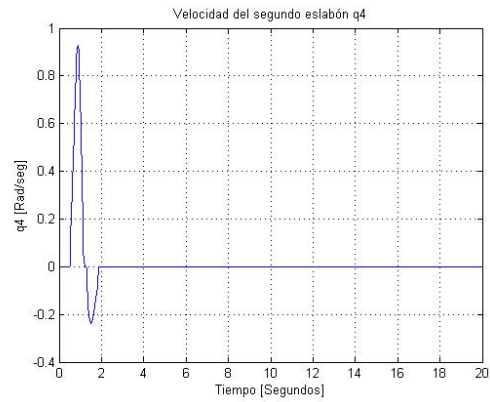


Fig. 4.36: Simulación de velocidad con fricción de Lure primer eslabón.

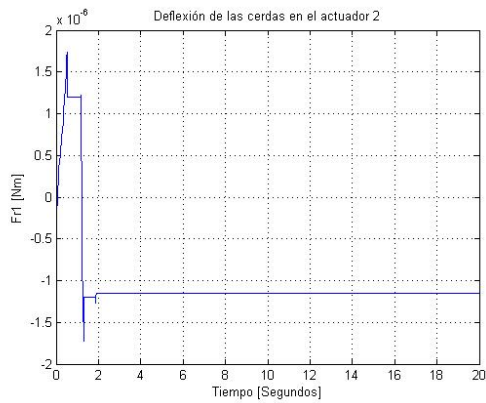


Fig. 4.37: Promedio de deflexión de las cerdas segundo actuador

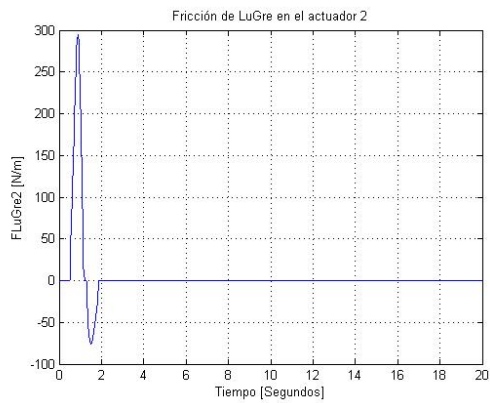


Fig. 4.38: Simulación de la fricción de Lure segundo actuador.

Se puede observar de las gráficas anteriores que el promedio de deflexión de las cerdas depende del cambio de posición, y la fricción de Lure depende de la velocidad articular.

Modelo de fricción de Dahl.

Las condiciones iniciales para el siguiente modelo se muestran a continuación.

$$\sigma_1 = 0.53$$

$$F_c = 0.05$$

Tiempo de simulación: 100 seg.

La siguiente ecuación del modelo de fricción de Dahl es sustituido en el R2GL.

$$\frac{dF}{dt} = \sigma \dot{q} - \frac{F}{f_c} |\dot{q}| \quad (4.13)$$

Primer eslabón y actuador.

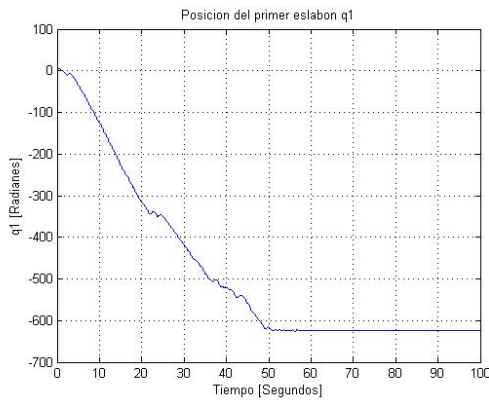


Fig. 4.39: Simulación de posición con fricción de Dahl primer eslabón.

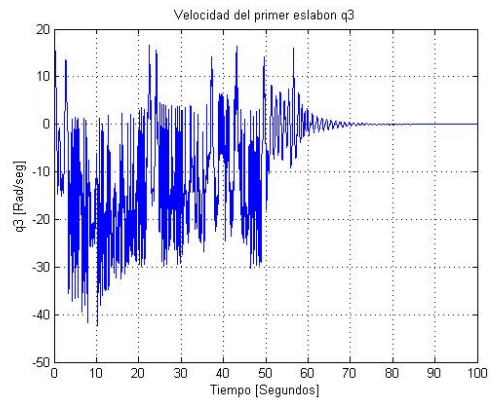


Fig. 4.40: Simulación de velocidad con fricción de Dahl primer eslabón.

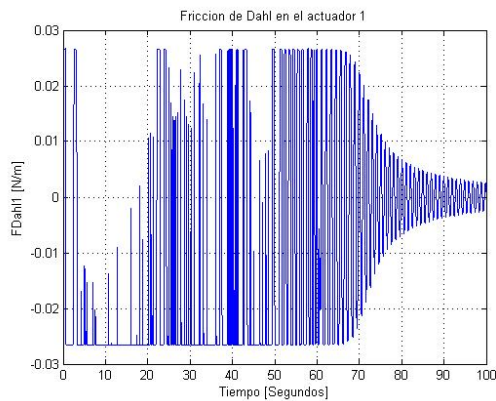


Fig. 4.41: Simulación de la fricción de Dahl primer actuador.

La posición de la gráfica anterior converge al reposo lentamente mientras que la velocidad y la fricción tienen un comportamiento oscilatorio, la velocidad se estabiliza en aproximadamente 70 seg. la fricción tiende al reposo.

Segundo eslabón y actuador.

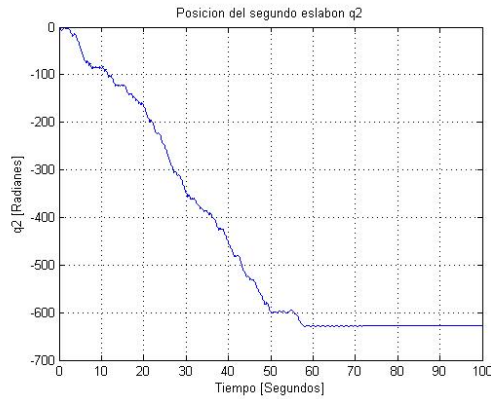


Fig. 4.42: Simulación de posición con fricción de Dahl segundo eslabón.

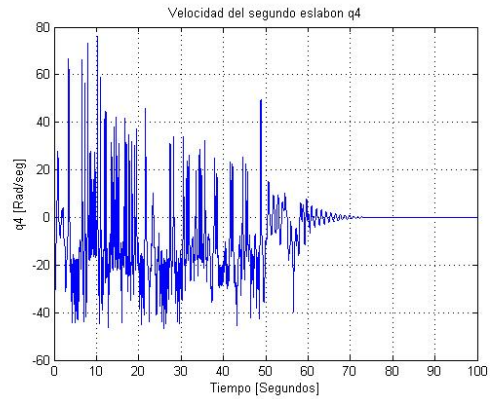


Fig. 4.43: Simulación de velocidad con fricción de Dahl segundo eslabón.

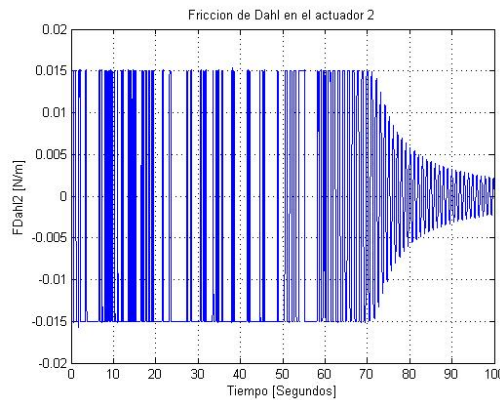


Fig. 4.44: Simulación de la fricción de Dahl segundo actuador.

El comportamiento de la fricción y velocidad es similar al de las gráficas anteriores, con un cambio en la posición pues se estabiliza en un periodo más amplio de tiempo.

Modelo de fricción de Maxwell.

La ecuación a sustituir es el modelo más complejo de fricción pues involucra el comportamiento dinámico de la fricción, así como el efecto Stribeck, es una aproximación más cercana al comportamiento real de la fricción en sistemas mecánicos.

Cuando el sistema esta en reposo se toma en cuenta la siguiente ecuación.

$$\frac{dz}{dt} = \dot{q} \quad (4.14)$$

Mientras que cuando cambia su estado de reposo e inicia un movimiento se considera la siguiente ecuación:

$$\frac{dz}{dt} = \tanh(\beta\dot{q}) \left(1 - \frac{z}{s}\right) \quad (4.15)$$

La siguiente ecuación modela la fuerza de fricción de Maxwell.

$$F = mz + \sigma \frac{dz}{dt} + \dot{q} \quad (4.16)$$

Las condiciones iniciales del sistema se definen a continuación:

Parámetro de atracción. c=0.25	$\sigma_1=0.005$;
Constante de deslizamiento de Coulomb. s=.024	f=0.045;
$\beta=30$	Tiempo de simulación: 10 seg.

Primer eslabón y actuador.

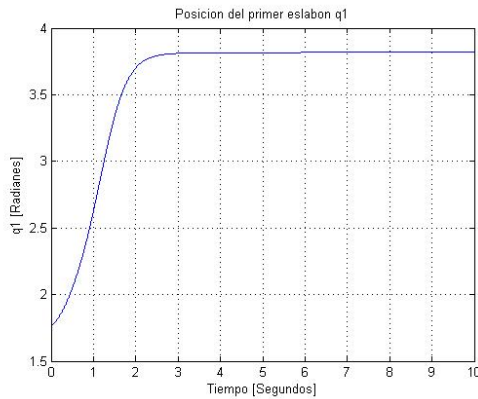


Fig. 4.45: Simulación de posición con fricción de Maxwell en primer eslabón.

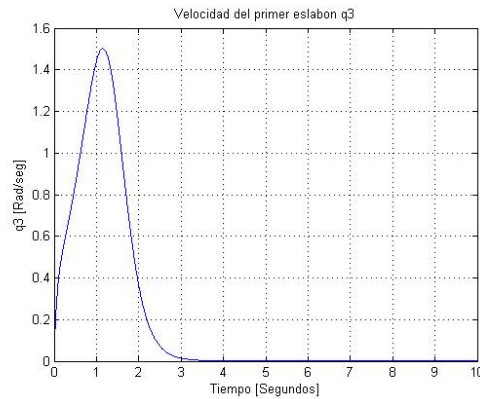


Fig. 4.46: Simulación de velocidad con fricción de Maxwell en primer eslabón.

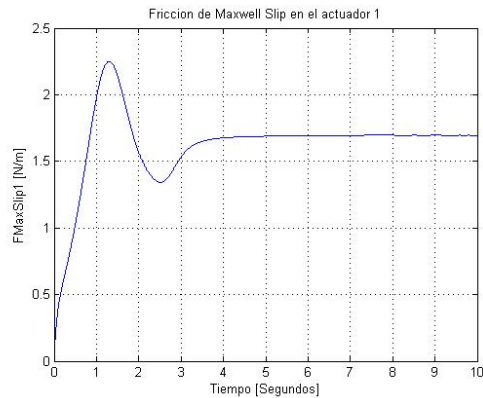


Fig. 4.47: Simulación de la fricción de Maxwell primer actuador.

Las gráficas anteriores muestran que en este modelo de fricción la posición converge al reposo muy pronto en aproximadamente 2 seg. la velocidad llega a cero en 3 seg., mientras que la fricción se estabiliza en un valor después de los 3seg. pero su valor no es cero si no que mientras que el sistema esta en reposo la fricción tiene un valor.

Segundo eslabón y actuador.

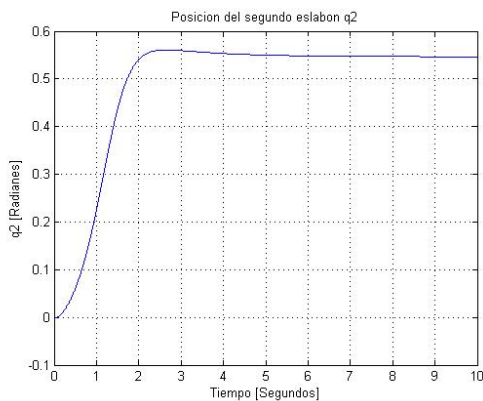


Fig. 4.48: Simulación de posición con fricción de Maxwell en segundo eslabón.

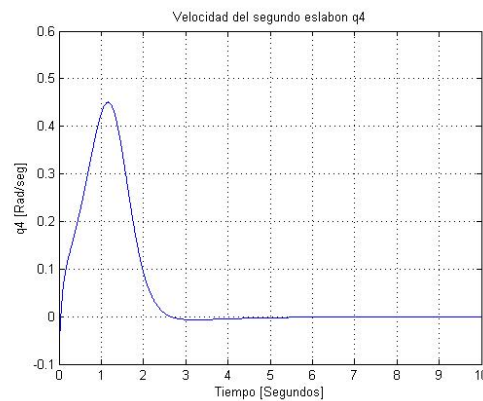


Fig. 4.49: Simulación de velocidad con fricción de Maxwell en segundo eslabón.

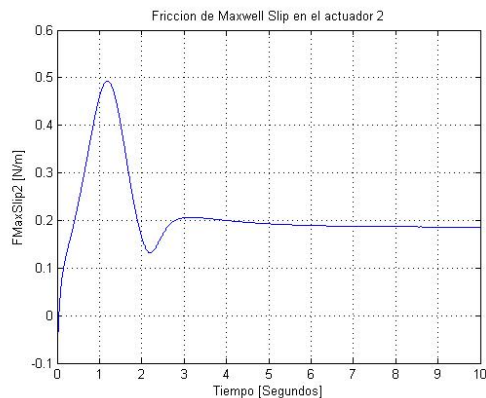


Fig. 4.50: Simulación de la fricción de Maxwell segundo actuador.

El comportamiento de los dos eslabones es muy parecido aunque como se aprecia en las gráficas anteriores en el segundo eslabón la fuerza de fricción es menor, debido a que hay menor influencia de la velocidad pues ésta es menor.

4.5 Conclusiones.

El saber el comportamiento de la fricción en un sistema electromecánico es importante debido a que es un fenómeno inherente a estos sistemas, por lo tanto evaluar cada uno de los modelos de fricción existentes, nos da un panorama, más claro de la energía que disipa la fricción, y como afecta el desempeño tanto en posición como en velocidad.

Es gracias a la fricción que el robot se estabiliza, pues no está sujeto a ningún control, solo es colocado en una posición vertical, a fin de que con un cambio en la condición inicial, caiga y se estabilice mediante la fricción, momento en el cual podemos evaluarlo para saber como es el comportamiento de la fuerza de fricción, en donde podemos ver que no es despreciable ésta fuerza pues logra estabilizar al robot, en un periodo de tiempo determinado.

Capítulo 5

5.1 Conclusiones generales.

A lo largo de éste trabajo de tesis se dieron a conocer los principales modelos de fricción comúnmente utilizados, así como ciertas estrategias que implican consideraciones más complejas y que describen los avances más recientes en tribología. Se tomaron en cuenta la mayor parte de consideraciones posibles de éste fenómeno, así mismo los fundamentos de los modelos clásicos, estáticos y dinámicos, además de los distintos efectos que produce la fricción en los sistemas electromecánicos para cada uno de los modelos presentados en éste trabajo de investigación, y con ello conseguir su posterior simulación digital, para que de esta manera se tuviera la oportunidad de analizar los resultados de las influencias tribológicas aplicadas a un sistema masa-resorte, que describe adicionalmente un efecto inercial y elástico. Sin embargo, la tendencia del estudio de los fenómenos tribológicos en sistemas electromecánicos tiene mayor interés en el desempeño de un robot manipulador, para nuestro caso de estudio se tomo en consideración uno con dos grados de libertad, con desempeño planar y con influencia del vector de fuerzas gravitacionales. Siendo así el objetivo fundamental de este trabajo, con lo cual concluimos que la fricción es un fenómeno físico inherente presente en todo sistema dinámico, y que produce distintos efectos en el sistema, tales como son el desgaste en los actuadores, en transmisiones mecánicas, articulaciones y propicia comportamientos indeseables en el sistema de control, mismo que puede tomar en consideración los modelos más avanzados de fricción y así compensar o inyectar de manera artificial dichos efectos, logrando con ello beneficios palpables en la práctica. De esta manera es posible evitar errores de posición, velocidad y fuerza de contacto, así como dificultades en el seguimiento de trayectorias dentro del espacio de trabajo.

La fricción es un fenómeno difícil de modelar matemáticamente, debido a las múltiples implicaciones que se tienen durante el movimiento relativo de dos cuerpos en contacto, sin embargo queda claro que el entender este fenómeno empleando técnicas modernas de simulación digital es posible afectar su influencia nociva durante el desempeño de la tarea en cualquier robot con cualquier arquitectura. Para ello se involucran técnicas de control no lineal de movimiento, mismas que permitan manipular la influencia de la fricción articular. Esto no implica que de manera realista desaparezca dicho fenómeno, lo que es posible conseguir es disminuir su influencia a partir del entendimiento de sus efectos. La fricción no es exclusiva de la robótica, se hace presente en todos los sistemas electromecánicos de cualquier propósito.

En este trabajo de investigación se presentan dos casos de estudio: el sistema masa-resorte definido por una ecuación diferencial de segundo orden lineal, y un robot planar de dos grados de libertad modelado mediante la formulación de Euler-Lagrange misma que considera las fuerzas inerciales, gravitatorias, centrífugas, centrípetas y de Coriolis, y que constituye un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales. En ambos casos de estudio el fenómeno de la fricción fue adherido empleando las leyes de la mecánica clásica y los distintos modelos de fricción reportados en la literatura, tomando en consideración las estrategias vigentes y de reciente creación.

El hecho de poder conocer a nivel simulación los efectos de la fricción en un sistema masa-resorte así como en un robot de dos grados de libertad, empleando los distintos modelos existentes, permitió realizar un estudio comparativo que permite verificar la validez de cada uno de ellos y en un momento dado su consideración para el diseño de las leyes de control de movimiento de robots.

En el modelado y simulación de los distintos modelos de fricción existentes, se observó, que la fricción que es opuesta al movimiento no siempre tiene el mismo comportamiento, y esto no depende exclusivamente del tipo de superficies que están en contacto, sino también del movimiento relativo que ocurre cuando éste inicia o concluye, situación que se hace presente durante la ejecución de una tarea. Cabe mencionar que la velocidad es un factor importante en el comportamiento de la fricción y sus características determinan dinámicamente el desempeño de un sistema electromecánico durante la ejecución de una tarea, tal es el caso de un robot manipulador.

5.2 Trabajos futuros

El trabajo futuro de esta línea de investigación y desarrollo consiste en los siguientes puntos:

- Identificación de parámetros de fricción en un robot planar de dos grados de libertad.
- Estudios de control de movimiento con compensación e inyección de fricción en un robot planar de dos grados de libertad.
- Publicación de un artículo científico con arbitraje estricto.

Los trabajos experimentales futuros serán realizados en la plataforma experimental presentada en la Figura 5.1.

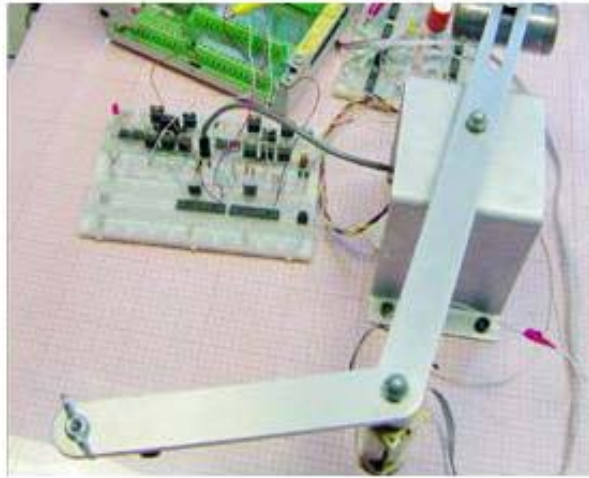


Figura 5.1: Robot experimental R2GL [21].

5.3 Perspectivas.

Las perspectivas de un trabajo de esta naturaleza son dar a conocer la importancia de los fenómenos de fricción en sistemas electromecánicos, sistemas excesivamente empleados en la industria y otros sectores sociales. Adicionalmente, el hecho de reunir los diferentes modelos de fricción existentes hasta el presente año, permite visualizar las técnicas modernas para interpretar de mejor manera dicho fenómeno y en un momento dado compensarlo o incrementarlo desde el diseño del mismo sistema hasta el diseño de su ley de control. Considerar este fenómeno en cualquier sistema mecatrónico permitirá elevar de manera óptima su desempeño, situación que implica una disminución de mantenimiento preventivo y correctivo, ahorro considerable de la energía e incremento de la vida útil de los mecanismos involucrados. Paralelamente los resultados inminentes tendrán que influir en un aumento en la calidad del proceso que involucra a dicho sistema electromecánico, tal es el caso de un robot manipulador.

Glosario

- **Actuador:** es el dispositivo que proporciona la fuerza motriz real para las articulaciones de un robot. El actuador suele obtener su energía a partir de una de estas tres fuentes: aire comprimido, fluido por presión o electricidad; por lo que reciben el nombre de actuadores neumáticos, hidráulicos o eléctricos. Los actuadores tales como los relés, solenoides y motores, posibilitan que la computadora, controle la operación de los sistemas del vehículo [17].
- **Articulación:** una articulación es la conexión que existe entre dos o más eslabones, la cual se encuentra en los nodos de los eslabones y permite algún movimiento o movimiento potencial, entre los eslabones conectados. Cada articulación provee al robot de al menos un “grado de libertad”. En otras palabras, las articulaciones permiten al manipulador realizar movimientos [17].
- **Centro de masa:** las fuerzas se distribuyen sobre una línea, un área o un volumen. Por lo común, no es muy difícil encontrar una resultante de estas fuerzas distribuidas. Para tener el mismo efecto esta resultante debe actuar sobre el centroide del cuerpo, el cual es un punto en el que se puede considerar que un sistema de fuerzas distribuidas está concentrado, con el mismo efecto que la fuerza distribuida [17].
- **Dinámica:** se denomina dinámica a la parte de la mecánica que estudia conjuntamente el movimiento y las fuerzas que lo originan [17].
- **Efecto de Coriolis:** efecto debido al movimiento rotacional de la tierra, que se manifiesta en todo cuerpo en movimiento, de tal forma que lo desvía de su trayectoria recta. En el hemisferio norte la desviación ocurre hacia la derecha de la dirección del cuerpo y mientras que en el hemisferio sur la desviación es hacia la izquierda [17].
- **Energía:** capacidad de realizar un trabajo [17].
- **Energía Cinética:** es la energía que posee un cuerpo por razón de su movimiento [17].
- **Energía potencial:** la que posee un cuerpo por el hecho de hallarse en un campo de fuerzas, se dice que está en reposo [17].
- **Eslabón:** el eslabón es un cuerpo rígido que posee por lo menos dos nodos, que son los puntos de unión con otros eslabones. Los eslabones se pueden nombrar de

- acuerdo al número de nodos que poseen, por ejemplo: Eslabón binario: Es el que contiene dos nodos. Eslabón ternario: Es el que contiene tres nodos [17].
- **Fricción:** la fricción aparece cuando dos superficies se frotan una en contra de la otra presentando desprendimiento de calor [17].
- **Fuerza de Coriolis:** efecto debido al movimiento rotacional de la tierra, que se manifiesta en todo cuerpo en movimiento, de tal forma que lo desvía de su trayectoria recta [17].
- **Fuerza de fricción:** fuerza aparente hacia el exterior experimentada por un cuerpo que gira alrededor de su eje [17].
- **Fuerza de gravedad:** fuerza de atracción entre dos masas. La magnitud de esta fuerza es directamente proporcional al producto de ambas masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa [17].
- **Grado de libertad:** son los posibles movimientos básicos independientes, ya sean giratorios o de desplazamiento, que el robot puede realizar [17].
- **Inercia:** propiedad de un cuerpo que tiende a oponerse a toda variación en su estado de reposo o de movimiento [17].
- **Longitud:** dimensión que expresa el valor de una distancia [17].
- **Manipulabilidad:** es la posibilidad de moverse libremente en todas las direcciones del espacio de trabajo [17].
- **Manipulador:** es un mecanismo que usualmente consiste en una serie de eslabones articulados o desplazamiento relativo a otro eslabón, para agarrar y mover objetos, por lo regular tiene varios grados de libertad [17].
- **Matriz:** conjunto de $m \times n$ números distribuidos en m filas y n columnas. Cada número se designa con dos índices: el primero señala el número de filas contadas de arriba a abajo, y el segundo de la columna contando de izquierda a derecha [17].
- **Mecánica:** es la rama de la Física y de la ingeniería que se ocupa de las relaciones mutuas entre fuerza, materia y movimiento [17].
- **Modelo matemático:** es simplemente una representación matemática de sistemas del mundo real. Este modelo se desarrolla a través de la aplicación, a los elementos de un sistema, de las reglas conocidas del comportamiento [17].
- **Radianes:** unidades angulares que corresponden a un arco de longitud igual a su radio [17].

- **Robot:** es un dispositivo mecánico que realiza acciones basadas en movimientos. Sus acciones más comunes son moverse autónomamente entre otras manipulaciones demasiado precisas, pesadas, repetitivas o riesgosas para el humano [17].
- **Robot manipulador:** son esencialmente brazos articulados. De forma más precisa, un manipulador convencional es una cadena cinemática abierta formada por un conjunto de eslabones o elementos de la cadena interrelacionados mediante articulaciones o pares cinemáticos [17].
- **Servomotor:** aparato mecánico gobernado por la rueda del timón y que a su vez acciona la caña del timón en los buques grandes [17].
- **Tarea de un robot:** es cualquier trayectoria que sigue el robot de forma repetitiva para realizar un objetivo. Es una rutina que ha sido programada con el fin de que el robot la realice cuando sea ejecutada [17].
- **Simulación digital:** representación del comportamiento de algo, expresado en magnitudes numéricas mediante el computador [17].
- **Stiction:** es la resistencia al inicio del movimiento, normalmente medido como la diferencia entre los valores de conducción requeridos para baja escala o sobre escala de la fricción estática. Stiction es una palabra creada para enfatizar la diferencia entre fricción estática y fricción dinámica [17].
- **Tribología:** ciencia que abarca el estudio de la fricción, el desgaste y la lubricación de sistemas electromecánicos [1].

Apéndice A: Código de las simulaciones del Sistema masa-resorte

Fricción de Coulomb.

```
clear all
close all
clc

global dx
dx=zeros(3,1);

options=odeset('MaxStep',0.1,'InitialStep',0.1);
[t,x]=ode45('mra_sec',[0 50],[0 0 0],options);

f = 0.07;
beta = 30;

Fc = f*tanh(beta*x(:,2));

figure(1)
plot(t,x(:,1));
xlabel('Tiempo (seg)');
ylabel('metros');
title('Posicion')
grid;
figure(2)
plot(t,x(:,2));
xlabel('Tiempo (seg)');
ylabel('m/s');
title('Velocidad')
grid;
figure(3)
plot(t,Fc);
xlabel('Tiempo (seg)');
ylabel('N');
title('Friccion de Coulomb')
grid;

function dx= mra_sec(t,x)
global dx

%Parametros
m=1;
k=2;
f = 0.07;
beta = 30;
u=.5;

%Friccion seca
Fc = f*tanh(beta*x(2));

% Ecuaciones de estado
dx(1,1)=x(2);
dx(2,1)=(k*u-Fc-k*x(1))/m;
```

Fricción viscosa.

```
clear all
close all
clc

global dx
dx=zeros(3,1);

options=odeset('MaxStep',0.1,'InitialStep',0.1);
[t,x]=ode45('mra_vis',[0 50],[0 0 0],options);

f = 0.4;
Fv = f*x(:,2);

figure (1)
plot(t,x(:,1));
xlabel('Tiempo (seg)');
ylabel('metros');
title('Posicion')
grid;
figure (2)
plot(t,x(:,2));
xlabel('Tiempo (seg)');
ylabel('m/s');
title('Velocidad')
grid;
figure (3)
plot(t,Fv);
xlabel('Tiempo (seg)');
ylabel('N');
title('Friccion Viscosa')
grid;

function dx= mra_vis(t,x)
global dx
%Parametros
m=1;
k=2;
f = 0.4;
u=.5;
% Friccion viscosa
Fv = f*x(2);
% Ecuaciones de estado
dx(1,1)=x(2);
dx(2,1)=(k*u-Fv-k*x(1))/m;
```

Fricción viscosa y de Coulomb.

```
clear all
close all
clc

global dx
dx=zeros(3,1);

options=odeset('MaxStep',0.1,'InitialStep',0.1);
[t,x]=ode45('mra_sec_Vis',[0 50],[0 0 0],options);

fv=0.04;
fc=0.07;
beta = 30;

%Fricción viscosa y de Coulomb
Fvc=(fv*x(:,2))+(fc*tanh(beta*x(:,2)));

%Fricción viscosa y de Coulomb
function dx= mra_sec_Vis(t,x)
global dx
%Parametros
m=1;
k=2;
fv=0.04;
fc=0.07;
beta = 30;
u=0.5;
%Fricción viscosa y de Coulomb
Fvc=(fv*x(2))+(fc*tanh(beta*x(2)));
% Ecuaciones de estado
dx(1,1)=x(2);
dx(2,1)=(k*u-Fvc-k*x(1))/m;

figure (1)
plot(t,x(:,1));
xlabel('Tiempo (seg)');
ylabel('metros');
title('Posicion')
grid;

figure (2)
plot(t,x(:,2));
xlabel('Tiempo (seg)');
ylabel('m/s');
title('Velocidad')
grid;

figure (3)
plot(t,Fvc);
xlabel('Tiempo (seg)');
ylabel('N');
title('Friccion viscosa y de Coulomb')
grid;
```

Efecto Stribeck

```
clear all
close all
clc
```

```
global dx
dx=zeros(2,1);
```

```
options=odeset('MaxStep',0.1,'InitialStep',0.1);
[t,x]=ode45('mra_str',[0 100],[0 0],options);
```

```
Fs=.5;
Fc=.25;
Vs=.001;
f=0.244;
delta_s=1;
Fv=f*x(:,2);
```

```
Fst=Fc+(Fs-Fc)*exp(-
abs((x(:,2)/Vs)).^delta_s)+Fv;
```

```
figure (1)
plot(t,x(:,1));
xlabel('Tiempo (seg)');
ylabel('metros');
title('Posicion')
grid;
figure (2)
plot(t,x(:,2));
xlabel('Tiempo (seg)');
ylabel('m/s');
title('Velocidad')
grid;
figure (3)
plot(t,Fv);
xlabel('Tiempo (seg)');
ylabel('m/s');
title('Friccion viscosa')
grid;
figure (4)
plot(t,Fst);
xlabel('Tiempo (seg)');
ylabel('N');
title('Efecto Stribeck')
grid;
```

```
function dx= mra_str(t,x)
global dx
```

```
%Parametros
```

```
m=1;
k=2;
Fs=.5;
Fc=.25;
Vs=0.01;
f=0.24;
delta_s=1;
u=0.5;
Fv=f*x(2);
```

```
% Funcion que describe el efecto Stribeck
Fst=Fc+(Fs-Fc)*exp(-
abs((x(2)/Vs)).^delta_s)+Fv;
```

```
% Ecuaciones de estado
```

```
dx(1,1)=x(2);
dx(2,1)=(k*u-Fst-k*x(1))/m;
```

Fricción de Lugre.

```
clear all
close all
clc
global dx
dx=zeros(3,1);
options=odeset('MaxStep',0.1,'InitialStep',0.1);
[t,x]=ode45('mra_lug',[0 1],[0 0 0],options);
sigma0=1*10^5;
sigma1=sqrt(1*10^5);
sigma2=0.4;
Fs=1.5;
Fc=1;
Vs=.001;
gv=(Fc+(Fs-Fc)*exp(-(x(:,2)/Vs).^2))/sigma0;
x3p=x(:,2)-(abs(x(:,2))./gv).*x(:,3);
Fl=sigma0*x(:,3)+sigma1*x3p+sigma2*x(:,2);
figure (1)
plot(t,x(:,1));
xlabel('Tiempo (seg)');
ylabel('metros');
title('Posicion')
grid;
figure (2)
plot(t,x(:,2));
xlabel('Tiempo (seg)');
ylabel('m/s');
title('Velocidad')
grid;
figure (3)
plot(t,gv);
xlabel('Tiempo (seg)');
ylabel('m/s');
title('Funcion que describe el efecto Stribeck')
grid;
figure (4)
plot(t,x(:,3));
xlabel('Tiempo (seg)');
ylabel('m');
title('Promedio de deflexion de las cerdas')
grid;
figure (5)
plot(t,Fl);
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel('N');
title('Friccion de Lugre');
grid;
```

```
function dx= mra_lug(t,x)
global dx
%Parametros
m=1;
k=2;
sigma0=10^5;
sigma1=sqrt(10^5);
sigma2=0.4;
Fs=1.5;
Fc=1;
Vs=.001;
u=.5;
% Funcion que describe el efecto Stribeck
gv=(Fc+(Fs-Fc)*exp(-(x(2)/Vs).^2))/sigma0;
x3p=x(2)-(abs(x(2))/gv)*x(3);
%Funcion que describe el efecto de friccion
de Lugre
Fl=sigma0*x(3)+sigma1*x3p+sigma2*x(2);
% Ecuaciones de estado
dx(1,1)=x(2);
dx(2,1)=(k*u-Fl-k*x(1))/m;
dx(3,1)=x3p;
```

Fricción de Dahl.

```
clear all
close all
clc

global dx
dx=zeros(3,1);

options=odeset('MaxStep',0.1,'InitialStep',0.1);
[t,x]=ode45('mra_dahl',[0 60],[0 0 0],options);

sigma=0.5;
Fc=1;

dF=sigma*x(:,2)-(x(:,3)/Fc).*abs(x(:,2));

figure (1)
plot(t,x(:,1));
xlabel('Tiempo (seg)');
ylabel('metros');
title('Posicion')
grid;
figure (2)
plot(t,x(:,2));
xlabel('Tiempo (seg)');
ylabel('m/s');
title('Velocidad')
grid;
figure (3)
plot(t,x(:,3));
xlabel('Tiempo (seg)');
ylabel('N');
title('Friccion Dahl')
grid;
```

```
function dx= mra_dahl(t,x)
global dx

%Parametros
m=1;
k=2;
u=.5;
sigma=0.5;
Fc=1;

%Friccion de Dahl
dF=sigma*x(2)-(x(3)/Fc)*abs(x(2));
%dF=sigma*x(2)-
sigma*x(3)*x(2)*tanh(50*x(2))/Fc;

% Ecuaciones de estado
dx(1,1)=x(2);
dx(2,1)=(k*u-dF-k*x(1))/m;
dx(3,1)=dF;
```

Fricción de Maxwell.

```
clear all
close all
clc

global dx
dx=zeros(3,1);

options=odeset('MaxStep',0.1,'InitialStep',0.1);
[t,x]=ode45('mra_maxwell_slip',[0 40],[0 0
0],options);

k=2;
m=1;
sigma=.005;
beta=30;
f=.25;
c=.25;
s=.024;

Dz= tanh(beta*x(:,2)).*(1-(x(:,3)/s));
Fms= k*x(:,3)+(sigma*Dz)+x(:,2);

figure (1)
plot(t,x(:,1));
xlabel('Tiempo (seg)');
ylabel('metros');
title('Posicion')
grid;
figure (2)
plot(t,x(:,2));
xlabel('Tiempo (seg)');
ylabel('m/s');
title('Velocidad')
grid;
figure (3)
plot(t, Fms);
xlabel('Tiempo(seg)');
ylabel('N');
title('Friccion de Maxwell Slip');
grid;

function dx= mra_maxwell_slip(t,x)
global dx
%Parametros

m=1;
k=2;
beta=30;
f=.25;
sigma=.005;

c=.25; % parametro de atraccion
s=.024; %constante de deslizamiento de
Coulomb

Dz=x(2);
if (x(2)< 0.0001 && x(2)> -0.0001)
    Dz= tanh(beta*x(2))*(1-(x(3)/s));
end

%Funcion que describe el efecto de
friccion de Maxwell Slip
Fms=(k*x(3))+(sigma*Dz)+x(2);

u=.5;

% Ecuaciones de estado
dx(1,1)=x(2);
dx(2,1)=(k*u-Fms-k*x(1))/m;
dx(3,1)=Dz;
```

Apéndice B: Código de las simulaciones del R2GL.

Fricción viscosa.

```
function dx = Robovis1(t,x)

global dx

%%% Masa del eslabon 1 %%%
m1=0.8293;
%%% Masa del eslabon 2 %%%
m2=0.3402;
%%% Longitud del eslabon 1 %%%
l1=0.2032;
%%% Longitud del eslabon 2 %%%
l2=0.3841;
%%% Longitud Al centro de mas del eslabon 1 %%%
lc1=0.1551;
%%% Longitud Al centro de mas del eslabon 2 %%%
lc2=0.1635;
%%% Inercia del eslabon 1 %%%
I1=0.005;
%%% Inercia del eslabon 2 %%%
I2=0.0043;
%%% Coeficientes de fricción
v1=0.245;
v2=0.27;
%%% Coeficientes de fricción de coulomb
c1=0.0023;
c2=0.0025;
%%% Gravedad %%%
g=9.8;

% Parametros reducidos %%%
O1 = m1*(lc1^2)+m2*(l1^2)+I1;
O2 = m2*(lc2^2)+I2;
O3 = m2*l1*lc2;
O4 = m1*lc1+m2*l1;
O5 = m2*lc2;
%%%%%%%%%% Modelo Dinámico del Robot
%Posiciones articulares
q=[x(1);x(3)];
```

```

%Velocidades articulares
qp=[x(2);x(4)];
% Matriz de Inercia
D11 = O1+O2+O3*cos(x(3));
D12 = O2+O3*cos(x(3));
D21 = O2+O3*cos(x(3));
D22 = O2;
% Matriz de Fuerzas Centripetas y Coriolis
C11 = -O3*sin(x(3))*x(4);
C12 = -O3*sin(x(3))*(x(2)+x(4));
C21 = -O3*sin(x(3))*x(2);
C22 = 0;
% Vector de fuerzas de Gravedad
G1 = O4*g*cos(x(1))+O5*g*cos(x(1)+x(3));
G2 = O5*g*cos(x(1)+x(3));
% Vector de fuerzas disipativas (Friccion)
Fr1 = v1*x(2);
Fr2 = v2*x(4);

% Matrices del robot
D=[D11,D12;D21,D22];
C=[C11,C12;C21,C22];
G=[G1;G2];
Fr=[Fr1;Fr2];
%Fr=[0;0];
N=Fr+C*qp+G;
%% Vector de entradas de control (Tau)
T=[0;0];

% Ecuaciones de Estado

qpp=inv(D)*(T-N);

dx(1,1)=x(2);
dx(2,1)=qpp(1);
dx(3,1)=x(4);
dx(4,1)=qpp(2);

*****
close all
clear all
clc

global dx
dx=zeros(4,1);

options=odeset('MaxStep',0.1,'InitialStep',0.1);

```

```
[t,x]=ode45('Robovis1',[0 10],[pi/2+0.2 0 0 0],options);
```

```
v1=0.245;
```

```
v2=0.27;
```

```
% Vector de fuerzas disipativas (Friccion)
```

```
Fr1 = v1*x(:,2);
```

```
Fr2 = v2*x(:,4);
```

```
figure (1)
```

```
plot (t,x(:,1));
```

```
title('Posicion del primer eslabon q1');
```

```
xlabel('Tiempo [Segundos]');
```

```
ylabel('q1 [Radianes]');
```

```
grid
```

```
%legend('q1','qd1');
```

```
figure (2)
```

```
plot (t,x(:,3));
```

```
title('Posicion del segundo eslabon q2');
```

```
xlabel('Tiempo [Segundos]');
```

```
ylabel('q2 [Radianes]');
```

```
grid
```

```
%legend('q2','qd2');
```

```
figure (3)
```

```
plot (t,x(:,2));
```

```
title('Velocidad del primer eslabon q3');
```

```
xlabel('Tiempo [Segundos]');
```

```
ylabel('q3 [Rad/seg]');
```

```
grid
```

```
%legend('q3','qd3');
```

```
figure (4)
```

```
plot (t,x(:,4));
```

```
title('Velocidad del segundo eslabon q4');
```

```
xlabel('Tiempo [Segundos]');
```

```
ylabel('q4 [Rad/seg]');
```

```
grid
```

```
%legend('q4','qd4');
```

```
figure (5)
```

```
plot (t,Fr1);
```

```
title('Friccion viscosa en el actuador 1');
```

```
xlabel('Tiempo [Segundos]');
```

```
ylabel('FV1 [N/m]');
```

```
grid
```

```

figure (6)
plot (t,Fr2);
title('Friccion viscosa en el actuador 2');
xlabel('Tiempo [Segundos]');
ylabel('FV2 [N/m]');
grid

```

Fricción de Coulomb.

```

function dx = Robocoulomb1(t,x)

global dx

Masa del eslabon 1 %%%
m1=0.8293;
%% Masa del eslabon 2 %%%
m2=0.3402;
%% Longitud del eslabon 1 %%%
l1=0.2032;
%% Longitud del eslabon 2 %%%
l2=0.3841;
%% Longitud Al centro de mas del eslabon 1 %%%
lc1=0.1551;
%% Longitud Al centro de mas del eslabon 2 %%%
lc2=0.1635;
%% Inercia del eslabon 1 %%%
I1=0.005;
%% Inercia del eslabon 2 %%%
I2=0.0043;
%% Coeficientes de fricción
v1=0.245;
v2=0.27;
%% Coeficientes de fricción de coulomb
c1=0.69;
c2=0.75;;
%% Gravedad %%%
g=9.8;

% Parametros reducidos %%%
O1 = m1*(lc1^2)+m2*(l1^2)+I1;
O2 = m2*(lc2^2)+I2;
O3 = m2*l1*lc2;
O4 = m1*lc1+m2*l1;
O5 = m2*lc2;

```

```

%%%%%%%%%% Modelo Dinámico del Robot
%Posiciones articulares
q=[x(1);x(3)];
%Velocidades articulares
qp=[x(2);x(4)];
% Matriz de Inercia
D11 = O1+O2+O3*cos(x(3));
D12 = O2+O3*cos(x(3));
D21 = O2+O3*cos(x(3));
D22 = O2;
% Matriz de Fuerzas Centripetas y Coriolis
C11 = -O3*sin(x(3))*x(4);
C12 = -O3*sin(x(3))*(x(2)+x(4));
C21 = -O3*sin(x(3))*x(2);
C22 = 0;
% Vector de fuerzas de Gravedad
G1 = O4*g*cos(x(1))+O5*g*cos(x(1)+x(3));
G2 = O5*g*cos(x(1)+x(3));
% Vector de fuerzas disipativas (Friccion)
beta=30;
Fr1 = c1*tanh(beta*x(2));
Fr2 = c2*tanh(beta*x(4));

% Matrices del robot
D=[D11,D12;D21,D22];
C=[C11,C12;C21,C22];
G=[G1;G2];
Fr=[Fr1;Fr2];
%Fr=[0;0];
N=Fr+C*qp+G;
%%% Vector de entradas de control (Tau)
T=[0;0];

% Ecuaciones de Estado

qpp=inv(D)*(T-N);

dx(1,1)=x(2);
dx(2,1)=qpp(1);
dx(3,1)=x(4);
dx(4,1)=qpp(2);

*****
close all
clear all
clc

```

```

global dx
dx=zeros(4,1);

options=odeset('MaxStep',0.1,'InitialStep',0.1);
[t,x]=ode45('Robocoulomb1',[0 50],[pi/2+0.2 0 0 0],options);

c1=0.69;
c2=0.75;
beta=30;

% Vector de fuerzas disipativas (Friccion)
Fr1 = c1*tanh(beta*x(:,2));
Fr2 = c2*tanh(beta*x(:,4));

figure (1)
plot (t,x(:,1));
title('Posicion del primer eslabon q1');
xlabel('Tiempo [Segundos]');
ylabel('q1 [Radianes]');
grid
%legend('q1','qd1');

figure (2)
plot (t,x(:,3));
title('Posicion del segundo eslabon q2');
xlabel('Tiempo [Segundos]');
ylabel('q2 [Radianes]');
grid
%legend('q2','qd2');

figure (3)
plot (t,x(:,2));
title('Velocidad del primer eslabon q3');
xlabel('Tiempo [Segundos]');
ylabel('q3 [Rad/seg]');
grid
%legend('q3','qd3');

figure (4)
plot (t,x(:,4));
title('Velocidad del segundo eslabon q4');
xlabel('Tiempo [Segundos]');
ylabel('q4 [Rad/seg]');
grid
%legend('q4','qd4');

figure (5)

```

```
plot (t,Fr1);
title('Friccion seca en el actuador 1');
xlabel('Tiempo [Segundos]');
ylabel('FC1 [N/m]');
grid
```

```
figure (6)
plot (t,Fr2);
title('Friccion seca en el actuador 2');
xlabel('Tiempo [Segundos]');
ylabel('FC2 [N/m]');
grid;
```

Fricción viscosa y de Coulomb.

```
function dx = Robo_coul_vis1(t,x)
```

```
global dx
```

```
%%%% Masa del eslabon 1 %%%
m1=0.8293;
%%%% Masa del eslabon 2 %%%
m2=0.3402;
%%%% Longitud del eslabon 1 %%%
l1=0.2032;
%%%% Longitud del eslabon 2 %%%
l2=0.3841;
%%%% Longitud Al centro de mas del eslabon 1 %%%
lc1=0.1551;
%%%% Longitud Al centro de mas del eslabon 2 %%%
lc2=0.1635;
%%%% Inercia del eslabon 1 %%%
I1=0.005;
%%%% Inercia del eslabon 2 %%%
I2=0.0043;
%%%% Coeficientes de fricción
v1=0.245;
v2=0.27;
%%%% Coeficientes de fricción de coulomb
c1=0.69;
c2=0.75;;
%%%% Gravedad %%%
g=9.8;

% Parametros reducidos %%%
```

```

O1 = m1*(lc1^2)+m2*(l1^2)+I1;
O2 = m2*(lc2^2)+I2;
O3 = m2*l1*lc2;
O4 = m1*lc1+m2*l1;
O5 = m2*lc2;
%%%%%%%%% Modelo Dinámico del Robot
%Posiciones articulares
q=[x(1);x(3)];
%Velocidades articulares
qp=[x(2);x(4)];
% Matriz de Inercia
D11 = O1+O2+O3*cos(x(3));
D12 = O2+O3*cos(x(3));
D21 = O2+O3*cos(x(3));
D22 = O2;
% Matriz de Fuerzas Centripetas y Coriolis
C11 = -O3*sin(x(3))*x(4);
C12 = -O3*sin(x(3))*(x(2)+x(4));
C21 = -O3*sin(x(3))*x(2);
C22 = 0;
% Vector de fuerzas de Gravedad
G1 = O4*g*cos(x(1))+O5*g*cos(x(1)+x(3));
G2 = O5*g*cos(x(1)+x(3));
% Vector de fuerzas disipativas (Friccion)
beta=30;

Fr1 = v2*x(2)+c1*tanh(beta*x(2));
Fr2 = v2*x(4)+c2*tanh(beta*x(4));

% Matrices del robot
D=[D11,D12;D21,D22];
C=[C11,C12;C21,C22];
G=[G1;G2];
Fr=[Fr1;Fr2];
%Fr=[0;0];
N=Fr+C*qp+G;
%%%%%%%% Vector de entradas de control (Tau)
T=[0;0];

% Ecuaciones de Estado

qpp=inv(D)*(T-N);

dx(1,1)=x(2);
dx(2,1)=qpp(1);
dx(3,1)=x(4);
dx(4,1)=qpp(2);

```

```
*****
```

```
close all
clear all
clc
```

```
global dx
dx=zeros(4,1);
```

```
options=odeset('MaxStep',0.1,'InitialStep',0.1);
[t,x]=ode45('Robo_coul_vis1',[0 80],[pi/2+0.2 0 0 0],options);
```

```
%%% Coeficientes de fricción
v1=0.245;
v2=0.27;
%%% Coeficientes de fricción de coulomb
c1=0.69;
c2=0.75;;
beta=30;
```

```
% Vector de fuerzas disipativas (Friccion)
Fr1 = v1*x(:,2)+c1*tanh(beta*x(:,2));
Fr2 = v2*x(:,4)+c2*tanh(beta*x(:,4));
```

```
figure (1)
plot (t,x(:,1));
title('Posicion del primer eslabon q1');
xlabel('Tiempo [Segundos]');
ylabel('q1 [Radianes]');
grid
%legend('q1','qd1');
```

```
figure (2)
plot (t,x(:,3));
title('Posicion del segundo eslabon q2');
xlabel('Tiempo [Segundos]');
ylabel('q2 [Radianes]');
grid
%legend('q2','qd2');
```

```
figure (3)
plot (t,x(:,2));
title('Velocidad del primer eslabon q3');
xlabel('Tiempo [Segundos]');
ylabel('q3 [Rad/seg]');
grid
%legend('q3','qd3');
```

```
figure (4)
plot (t,x(:,4));
title('Velocidad del segundo eslabon q4');
xlabel('Tiempo [Segundos]');
ylabel('q4 [Rad/seg]');
grid
%legend('q4','qd4');
```

```
figure (5)
plot (t,Fr1);
title('Friccion seca y viscosa en el actuador 1');
xlabel('Tiempo [Segundos]');
ylabel('F1 [N/m]');
grid
```

```
figure (6)
plot (t,Fr2);
title('Friccion seca y viscosa en el actuador 2');
xlabel('Tiempo [Segundos]');
ylabel('F2 [N/m]');
grid
```

Efecto Stribeck.

```
function dx = Robostr1(t,x)
```

```
global dx
```

```
%%%% Masa del eslabon 1 %%%
m1=0.8293;
%%%% Masa del eslabon 2 %%%
m2=0.3402;
%%%% Longitud del eslabon 1 %%%
l1=0.2032;
%%%% Longitud del eslabon 2 %%%
l2=0.3841;
%%%% Longitud Al centro de mas del eslabon 1 %%%
lc1=0.1551;
%%%% Longitud Al centro de mas del eslabon 2 %%%
lc2=0.1635;
%%%% Inercia del eslabon 1 %%%
I1=0.005;
%%%% Inercia del eslabon 2 %%%
I2=0.0043;
```

```

%% Coeficientes de fricción
v1=0.245;
v2=0.27;
%% Coeficientes de fricción de coulomb
c1=0.69;
c2=0.75;;
%% Gravedad %%
g=9.8;

% Parametros reducidos %%
O1 = m1*(lc1^2)+m2*(l1^2)+I1;
O2 = m2*(lc2^2)+I2;
O3 = m2*l1*lc2;
O4 = m1*lc1+m2*l1;
O5 = m2*lc2;
%% Modelo Dinámico del Robot
% Posiciones articulares
q=[x(1);x(3)];
% Velocidades articulares
qp=[x(2);x(4)];
% Matriz de Inercia
D11 = O1+O2+O3*cos(x(3));
D12 = O2+O3*cos(x(3));
D21 = O2+O3*cos(x(3));
D22 = O2;
% Matriz de Fuerzas Centripetas y Coriolis
C11 = -O3*sin(x(3))*x(4);
C12 = -O3*sin(x(3))*(x(2)+x(4));
C21 = -O3*sin(x(3))*x(2);
C22 = 0;
% Vector de fuerzas de Gravedad
G1 = O4*g*cos(x(1))+O5*g*cos(x(1)+x(3));
G2 = O5*g*cos(x(1)+x(3));

% Vector de fuerzas disipativas (Friccion)
Fs1=.53;
Fc1=.35;
Vs1=.0018;
f1=0.042;
deltas1=2;

Fs2=.5;
Fc2=.25;
Vs2=.001;
f2=0.04;
deltas2=2;

```

```

Fv1=f1*x(2);

Fv2=f2*x(4);

Fr1=Fc1+(Fs1-Fc1)*exp(-abs((x(2)/Vs1)).^deltas1)+Fv1;
Fr2=Fc2+(Fs2-Fc2)*exp(-abs((x(4)/Vs2)).^deltas2)+Fv2;

% Matrices del robot
D=[D11,D12;D21,D22];
C=[C11,C12;C21,C22];
G=[G1;G2];
Fr=[Fr1;Fr2];
%Fr=[0;0];
N=Fr+C*qp+G;
%% Vector de entradas de control (Tau)
T=[0;0];

% Ecuaciones de Estado

qpp=inv(D)*(T-N);

dx(1,1)=x(2);
dx(2,1)=qpp(1);
dx(3,1)=x(4);
dx(4,1)=qpp(2);

*****
close all
clear all
clc

global dx
dx=zeros(4,1);

options=odeset('MaxStep',0.1,'InitialStep',0.1);
[t,x]=ode45('Robostr1',[0 80],[pi/2+0.2 0 0 0],options);

% Vector de fuerzas disipativas (Friccion)
Fs1=.53;
Fc1=.35;
Vs1=.0018;
f1=0.042;
deltas1=2;

Fs2=.5;
Fc2=.25;

```

```

Vs2=.001;
f2=0.04;
deltas2=2;

Fv1=f1*x(2);
Fv2=f2*x(4);

Fr1=Fc1+(Fs1-Fc1)*exp(-abs((x(:,2)/Vs1).^deltas1)+Fv1;
Fr2=Fc2+(Fs2-Fc2)*exp(-abs((x(:,4)/Vs2).^deltas2)+Fv2;

figure (1)
plot (t,x(:,1));
title('Posicion del primer eslabon q1');
xlabel('Tiempo [Segundos]');
ylabel('q1 [Radianes]');
grid
%legend('q1','qd1');

figure (2)
plot (t,x(:,3));
title('Posicion del segundo eslabon q2');
xlabel('Tiempo [Segundos]');
ylabel('q2 [Radianes]');
grid
%legend('q2','qd2');

figure (3)
plot (t,x(:,2));
title('Velocidad del primer eslabon q3');
xlabel('Tiempo [Segundos]');
ylabel('q3 [Rad/seg]');
grid
%legend('q3','qd3');

figure (4)
plot (t,x(:,4));
title('Velocidad del segundo eslabon q4');
xlabel('Tiempo [Segundos]');
ylabel('q4 [Rad/seg]');
grid
%legend('q4','qd4');

figure (5)
plot (t,Fr1);
title('Friccion de Stibeck en el actuador 1');
xlabel('Tiempo [Segundos]');

```

```
ylabel('F1 [N/m]');  
grid
```

```
figure (6)  
plot (t,Fr2);  
title('Friccion de Stibeck en el actuador 2');  
xlabel('Tiempo [Segundos]');  
ylabel('F2 [N/m]');  
grid
```

Fricción de Lugre.

```
function dx = RoboLugre1(t,x)
```

```
global dx
```

```
%%% Masa del eslabon 1 %%%  
m1=0.8293;  
%%% Masa del eslabon 2 %%%  
m2=0.3402;  
%%% Longitud del eslabon 1 %%%  
l1=0.2032;  
%%% Longitud del eslabon 2 %%%  
l2=0.3841;  
%%% Longitud Al centro de mas del eslabon 1 %%%  
lc1=0.1551;  
%%% Longitud Al centro de mas del eslabon 2 %%%  
lc2=0.1635;  
%%% Inercia del eslabon 1 %%%  
I1=0.005;  
%%% Inercia del eslabon 2 %%%  
I2=0.0043;  
%%% Coeficientes de fricción  
v1=0.245;  
v2=0.27;  
%%% Coeficientes de fricción de coulomb  
c1=0.69;  
c2=0.75;;  
%%% Gravedad %%%  
g=9.8;  
  
% Parametros reducidos %%%  
O1 = m1*(lc1^2)+m2*(l1^2)+I1;  
O2 = m2*(lc2^2)+I2;  
O3 = m2*l1*lc2;
```

```

O4 = m1*lc1+m2*l1;
O5 = m2*lc2;
%%%%%%%%%% Modelo Dinámico del Robot
%Posiciones articulares
q=[x(1);x(3)];
%Velocidades articulares
qp=[x(2);x(4)];
% Matriz de Inercia
D11 = O1+O2+O3*cos(x(3));
D12 = O2+O3*cos(x(3));
D21 = O2+O3*cos(x(3));
D22 = O2;
% Matriz de Fuerzas Centripetas y Coriolis
C11 = -O3*sin(x(3))*x(4);
C12 = -O3*sin(x(3))*(x(2)+x(4));
C21 = -O3*sin(x(3))*x(2);
C22 = 0;
% Vector de fuerzas de Gravedad
G1 = O4*g*cos(x(1))+O5*g*cos(x(1)+x(3));
G2 = O5*g*cos(x(1)+x(3));

%%%%%%%%%% Vector de fuerzas disipativas (Friccion)

% Parametros de la fricción de LuGre
sigma0=10^5;
sigma1=sqrt(10^5);
sigma2=0.4;

Fs1=.15;
Fc1=.1;
Vs1=.001;

Fs2=.18;
Fc2=.12;
Vs2=.0011;

% Funcion que describe el efecto Stribeck
gv1=(Fc1+(Fs1-Fc1)*exp(-(x(2)/Vs1).^2))/sigma0;
gv2=(Fc2+(Fs2-Fc2)*exp(-(x(4)/Vs2).^2))/sigma0;

% Promedio de deflexion de las cerdas
dz1=x(2)-(abs(x(2))/gv1)*x(5);
dz2=x(4)-(abs(x(4))/gv2)*x(6);

% Funcion que describe la Friccion de LuGre
Fr1=sigma0*x(5)+sigma1*dz1+sigma2*x(2);
Fr2=sigma0*x(6)+sigma1*dz2+sigma2*x(4);

```

```

% Matrices del robot
D=[D11,D12;D21,D22];
C=[C11,C12;C21,C22];
G=[G1;G2];
Fr=[Fr1;Fr2];
%Fr=[0;0];
N=Fr+C*qp+G;
%% Vector de entradas de control (Tau)
T=[0;0];

% Ecuaciones de Estado

qpp=inv(D)*(T-N);

dx(1,1)=x(2);
dx(2,1)=qpp(1);
dx(3,1)=x(4);
dx(4,1)=qpp(2);
dx(5,1)=dz1;
dx(6,1)=dz2;

*****
close all
clear all
clc

global dx
dx=zeros(6,1);

options=odeset('MaxStep',0.1,'InitialStep',0.1);
[t,x]=ode45('RoboLugre1',[0 10],[pi/2+0.2 0 0 0 0],options);

% Parametros de friccion de Lugre
sigma0=10^5;
sigma1=sqrt(10^5);
sigma2=0.4;

Fs1=.15;
Fc1=.1;
Vs1=.001;

Fs2=.18;
Fc2=.12;
Vs2=.0011;

% Funcion que describe el efecto Stribeck

```

```

gv1=(Fc1+(Fs1-Fc1)*exp(-(x(:,2)/Vs1).^2))/sigma0;
gv2=(Fc2+(Fs2-Fc2)*exp(-(x(:,4)/Vs2).^2))/sigma0;

% Promedio de deflexion de las cerdas
dz1=x(:,2)-(abs(x(:,2))./gv1).*x(:,5);
dz2=x(:,4)-(abs(x(:,4))./gv2).*x(:,6);

% Funcion que describe la friccion de LuGre
Fr1=sigma0*x(:,5)+sigma1*dz1+sigma2*x(:,2);
Fr2=sigma0*x(:,6)+sigma1*dz2+sigma2*x(:,4);

figure (1)
plot (t,x(:,1));
title('Posicion del primer eslabon q1');
xlabel('Tiempo [Segundos]');
ylabel('q1 [Radianes]');
grid
%legend('q1','qd1');

figure (2)
plot (t,x(:,3));
title('Posicion del segundo eslabon q2');
xlabel('Tiempo [Segundos]');
ylabel('q2 [Radianes]');
grid
%legend('q2','qd2');

figure (3)
plot (t,x(:,2));
title('Velocidad del primer eslabon q3');
xlabel('Tiempo [Segundos]');
ylabel('q3 [Rad/seg]');
grid
%legend('q3','qd3');

figure (4)
plot (t,x(:,4));
title('Velocidad del segundo eslabon q4');
xlabel('Tiempo [Segundos]');
ylabel('q4 [Rad/seg]');
grid
%legend('q4','qd4');

figure (5)
plot (t,x(:,5));
title('Promedio de deflexion de la cerdas en el actuador 1');

```

```
xlabel('Tiempo [Segundos]');  
ylabel('%');  
grid
```

```
figure (6)  
plot (t,x(:,6));  
title('Promedio de deflexion de la cerdas en el actuador 2');  
xlabel('Tiempo [Segundos]');  
ylabel('%');  
grid
```

```
figure (7)  
plot (t,gv1);  
title('Funcion que describe el efecto Stribeck en el actuador 1');  
xlabel('Tiempo [Segundos]');  
ylabel('N.m');  
grid
```

```
figure (8)  
plot (t,gv2);  
title('Funcion que describe el efecto Stribeck en el actuador 2');  
xlabel('Tiempo [Segundos]');  
ylabel('N.m');  
grid
```

```
figure (9)  
plot (t,Fr1);  
title('Friccion de LuGre en el actuador 1');  
xlabel('Tiempo [Segundos]');  
ylabel('FLuGre1 [N/m]');  
grid
```

```
figure (10)  
plot (t,Fr2);  
title('Friccion de LuGre en el actuador 2');  
xlabel('Tiempo [Segundos]');  
ylabel('FLuGre2 [N/m]');  
grid;
```

Fricción de Dahl.

function dx = RoboDahl1(t,x)

global dx

```
%%% Masa del eslabon 1 %%%  
m1=0.8293;  
%%% Masa del eslabon 2 %%%  
m2=0.3402;  
%%% Longitud del eslabon 1 %%%  
l1=0.2032;  
%%% Longitud del eslabon 2 %%%  
l2=0.3841;  
%%% Longitud Al centro de mas del eslabon 1 %%%  
lc1=0.1551;  
%%% Longitud Al centro de mas del eslabon 2 %%%  
lc2=0.1635;  
%%% Inercia del eslabon 1 %%%  
I1=0.005;  
%%% Inercia del eslabon 2 %%%  
I2=0.0043;  
%%% Coeficientes de fricción  
v1=0.245;  
v2=0.27;  
%%% Coeficientes de fricción de coulomb  
c1=0.69;  
c2=0.75;;  
%%% Gravedad %%%  
g=9.8;  
  
% Parametros reducidos %%%  
O1 = m1*(lc1^2)+m2*(l1^2)+I1;  
O2 = m2*(lc2^2)+I2;  
O3 = m2*l1*lc2;  
O4 = m1*lc1+m2*l1;  
O5 = m2*lc2;  
%%%%%%%%%% Modelo Dinámico del Robot  
%Posiciones articulares  
q=[x(1);x(3)];  
%Velocidades articulares  
qp=[x(2);x(4)];  
% Matriz de Inercia  
D11 = O1+O2+O3*cos(x(3));  
D12 = O2+O3*cos(x(3));  
D21 = O2+O3*cos(x(3));  
D22 = O2;
```

```

% Matriz de Fuerzas Centripetas y Coriolis
C11 = -O3*sin(x(3))*x(4);
C12 = -O3*sin(x(3))*(x(2)+x(4));
C21 = -O3*sin(x(3))*x(2);
C22 = 0;
% Vector de fuerzas de Gravedad
G1 = O4*g*cos(x(1))+O5*g*cos(x(1)+x(3));
G2 = O5*g*cos(x(1)+x(3));

%%%%%%%% Vector de fuerzas disipativas (Friccion)

sigma1=.53;
Fc1=.05;
sigma2=.5;
Fc2=.03;

%Friccion de Dahl

dF1=sigma1*x(2)-(x(5)/Fc1)*abs(x(2));
%dF=sigma*x(2)-sigma*x(3)*x(2)*tanh(50*x(2))/Fc;
dF2=sigma2*x(4)-(x(6)/Fc2)*abs(x(4));
%dF=sigma*x(2)-sigma*x(3)*x(2)*tanh(50*x(2))/Fc;

% Matrices del robot
D=[D11,D12;D21,D22];
C=[C11,C12;C21,C22];
G=[G1;G2];
Fr=[x(5);x(6)];
%Fr=[0;0];
N=Fr+C*qp+G;
%%%%%%%% Vector de entradas de control (Tau)
T=[0;0];

% Ecuaciones de Estado
qpp=inv(D)*(T-N);

dx(1,1)=x(2);
dx(2,1)=qpp(1);
dx(3,1)=x(4);
dx(4,1)=qpp(2);
dx(5,1)=dF1;
dx(6,1)=dF2;

*****
close all

```

```

clear all
clc

global dx
dx=zeros(6,1);

options=odeset('MaxStep',0.1,'InitialStep',0.1);
[t,x]=ode45('RoboDahl1',[0 100],[pi/2+0.2 0 0 0 0 0],options);

figure (1)
plot (t,x(:,1));
title('Posicion del primer eslabon q1');
xlabel('Tiempo [Segundos]');
ylabel('q1 [Radianes]');
grid
%legend('q1','qd1');

figure (2)
plot (t,x(:,3));
title('Posicion del segundo eslabon q2');
xlabel('Tiempo [Segundos]');
ylabel('q2 [Radianes]');
grid
%legend('q2','qd2');

figure (3)
plot (t,x(:,2));
title('Velocidad del primer eslabon q3');
xlabel('Tiempo [Segundos]');
ylabel('q3 [Rad/seg]');
grid
%legend('q3','qd3');

figure (4)
plot (t,x(:,4));
title('Velocidad del segundo eslabon q4');
xlabel('Tiempo [Segundos]');
ylabel('q4 [Rad/seg]');
grid
%legend('q4','qd4');

figure (5)
plot (t,x(:,5));
title('Friccion de Dahl en el actuador 1');
xlabel('Tiempo [Segundos]');
ylabel('FDahl1 [N/m]');

```

grid

```
figure (6)
plot (t,x(:,6));
title('Friccion de Dahl en el actuador 2');
xlabel('Tiempo [Segundos]');
ylabel('FDahl2 [N/m]');
grid
```

Fricción de Maxwell.

```
function dx = RoboMaxSlip1(t,x)
```

```
global dx
```

```
%%%% Masa del eslabon 1 %%%
m1=0.8293;
%%%% Masa del eslabon 2 %%%
m2=0.3402;
%%%% Longitud del eslabon 1 %%%
l1=0.2032;
%%%% Longitud del eslabon 2 %%%
l2=0.3841;
%%%% Longitud Al centro de mas del eslabon 1 %%%
lc1=0.1551;
%%%% Longitud Al centro de mas del eslabon 2 %%%
lc2=0.1635;
%%%% Inercia del eslabon 1 %%%
I1=0.005;
%%%% Inercia del eslabon 2 %%%
I2=0.0043;
%%%% Coeficientes de fricción
v1=0.245;
v2=0.27;
%%%% Coeficientes de fricción de coulomb
c1=0.69;
c2=0.75;;
%%%% Gravedad %%%
g=9.8;

% Parametros reducidos %%%
O1 = m1*(lc1^2)+m2*(l1^2)+I1;
O2 = m2*(lc2^2)+I2;
O3 = m2*l1*lc2;
O4 = m1*lc1+m2*l1;
```

```

O5 = m2*lc2;
%%%%%%%%% Modelo Dinámico del Robot
%Posiciones articulares
q=[x(1);x(3)];
%Velocidades articulares
qp=[x(2);x(4)];
% Matriz de Inercia
D11 = O1+O2+O3*cos(x(3));
D12 = O2+O3*cos(x(3));
D21 = O2+O3*cos(x(3));
D22 = O2;
% Matriz de Fuerzas Centripetas y Coriolis
C11 = -O3*sin(x(3))*x(4);
C12 = -O3*sin(x(3))*(x(2)+x(4));
C21 = -O3*sin(x(3))*x(2);
C22 = 0;
% Vector de fuerzas de Gravedad
G1 = O4*g*cos(x(1))+O5*g*cos(x(1)+x(3));
G2 = O5*g*cos(x(1)+x(3));

%%%%%%%%% Vector de fuerzas disipativas (Friccion)
% Parametros de la fricción de Maxwell Slip
beta1=30;
f1=.045;
sigma1=.005;
c1=.25; % parametro de atraccion
s1=.024; %constante de deslizamiento de Coulomb

beta2=30;
f2=.025;
sigma2=.0053;
c2=.251; % parametro de atraccion
s2=.0242; %constante de deslizamiento de Coulomb

Dz1=x(2);
if (x(2)< 0.0001 && x(2)> -0.0001)
    Dz1= tanh(beta1*x(2))*(1-(x(5)/s1));
end

Dz2=x(4);
if (x(4)< 0.0001 && x(4)> -0.0001)
    Dz2= tanh(beta2*x(4))*(1-(x(6)/s1));
end

%Funcion que describe el efecto de friccion de Maxwell Slip
Fr1=(m1*x(5))+(sigma1*Dz1)+x(2);

```

```
Fr2=(m2*x(6))+(sigma2*Dz2)+x(4);
```

```
% Matrices del robot
```

```
D=[D11,D12;D21,D22];
```

```
C=[C11,C12;C21,C22];
```

```
G=[G1;G2];
```

```
Fr=[Fr1;Fr2];
```

```
%Fr=[0;0];
```

```
N=Fr+C*qp+G;
```

```
%%%%%%%% Vector de entradas de control (Tau)
```

```
T=[0;0];
```

```
% Ecuaciones de Estado
```

```
qpp=inv(D)*(T-N);
```

```
dx(1,1)=x(2);
```

```
dx(2,1)=qpp(1);
```

```
dx(3,1)=x(4);
```

```
dx(4,1)=qpp(2);
```

```
dx(5,1)=Dz1;
```

```
dx(6,1)=Dz2;
```

```
*****
```

```
close all
```

```
clear all
```

```
clc
```

```
global dx
```

```
dx=zeros(6,1);
```

```
options=odeset('MaxStep',0.1,'InitialStep',0.1);
```

```
[t,x]=ode45('RoboMaxSlip1',[0 10],[pi/2+0.2 0 0 0 0],options);
```

```
% Parametros de friccion de Lugre
```

```
m1=0.8293;
```

```
m2=0.3402;
```

```
beta1=30;
```

```
f1=.045;
```

```
sigma1=.005;
```

```
c1=.25; % parametro de atraccion
```

```
s1=.024; %constante de deslizamiento de Coulomb
```

```
beta2=30;
```

```
f2=.025;
```

```

sigma2=.0053;
c2=.251; % parametro de atraccion
s2=.0242; %constante de deslizamiento de Coulomb

% Elementos de deslizamiento
Dz1= tanh(beta1*x(:,2)).*(1-(x(:,5)/s1));
Dz2= tanh(beta2*x(:,4)).*(1-(x(:,6)/s2));

%Funcion que describe el efecto de friccion de Maxwell Slip
Fr1=(m1*x(:,5))+(sigma1*Dz1)+x(:,2);
Fr2=(m2*x(:,6))+(sigma2*Dz2)+x(:,4);

figure (1)
plot (t,x(:,1));
title('Posicion del primer eslabon q1');
xlabel('Tiempo [Segundos]');
ylabel('q1 [Radianes]');
grid
%legend('q1','qd1');

figure (2)
plot (t,x(:,3));
title('Posicion del segundo eslabon q2');
xlabel('Tiempo [Segundos]');
ylabel('q2 [Radianes]');
grid
%legend('q2','qd2');

figure (3)
plot (t,x(:,2));
title('Velocidad del primer eslabon q3');
xlabel('Tiempo [Segundos]');
ylabel('q3 [Rad/seg]');
grid
%legend('q3','qd3');

figure (4)
plot (t,x(:,4));
title('Velocidad del segundo eslabon q4');
xlabel('Tiempo [Segundos]');
ylabel('q4 [Rad/seg]');
grid
%legend('q4','qd4');

figure (5)
plot (t,Fr1);

```

```
title('Friccion de Maxwell Slip en el actuador 1');  
xlabel('Tiempo [Segundos]');  
ylabel('FMaxSlip1 [N/m]');  
grid
```

```
figure (6)  
plot (t,Fr2);  
title('Friccion de Maxwell Slip en el actuador 2');  
xlabel('Tiempo [Segundos]');  
ylabel('FMaxSlip2 [N/m]');  
grid
```

Bibliografía

- [1] Martínez Pérez, Francisco. *La tribología ciencia y técnica para el mantenimiento*. Ed. Limusa. México D. F. 1996
- [2] Kelly Rafael, Llamas Jesús, Campa Ricardo. *A measurement procedure for viscous and coulomb friction*. IEE Transactions on instrumentation and measurement on instrumentation and measurement, Vol. 49, No.4 August 2000.
- [3] Olsson, H., Aström, K.J., Canudas de Wit, C. *Friction models and friction compensation*.
- [4] A. D. Sarkar, *Desgaste de los metales*, Ed. Limusa. Primera edición. 1990. México, D.F., pag. 227.
- [5] A. Bedford and F. Wallace. *Mecánica para ingeniería estática*. Ed. Addison Wesley, 1996. México D.F. pág. 507.
- [6] P.-A. Bliman and M. Sorine. Friction modeling by hysteresis operators. Application to Dahl, sticktion and Stribeck effects. In *Proceedings of the Conference "Models of Hysteresis"*, Trento, Italy, 1991.
- [7] P.-A. Bliman and M. Sorine. A system-theoretic approach of systems with hysteresis. Application to friction modeling and compensation. In *Proceeding of the second European Control Conference, Groningen, The Netherlands*, pages 1844-49, 1993.
- [8] P.-A. Bliman and M. Sorine. Easy-to-use realistic dry friction models for automatic control. In *Proceedings of 3rd European Control Conference, Rome, Italy*, pages 3788-3794, 1995.
- [9] Ernest Rabinowicz. The nature of the static and kinetic coefficients of friction. *Journal of Applied Physics*, 22(11):1373-79, 1951.
- [10] R. Stribeck. Die wesentlichen Eigenschaften der Gleit. Und Rollenlager- The key qualities of sliding and roller bearings. *Zeitschrift des Vereines Seutscher, Ingenieure*, 46(38, 39):1342-48, 1432-37, 1902.
- [11] A. Harnoy and B. Friedland. Dynamic friction model of lubricated surfaces for precise motion control. In *Preprint No. 93-TC-ID-2*. Society of Tribologists and Lubrication Engineers, 1993.
- [12] D. P. Hess and A. Soom. Friction at a lubricated line contact operating at oscillating sliding velocities. *Journal of Tribology*, 112:147-152, 1990.
- [13] A. Harnoy and B. Friedland. Modeling and simulation of elastic and friction forces in lubricated bearings for precise motion control. In *Preprint No. 93-TC-ID-2*. Society of Tribologists and Lubrication Engineers, 1993.

-
- [14] http://www.20sim.com/webhelp4/library/iconic_diagrams/Mechanical/Friction/Static_Friction_Models.htm
- [15] B. Armstrong-Hélouvry, *Control of Machines with Friction*. Norwell, MA: Kluwer, 1991.
- [16] Kelly R., Santibáñez V., “Control de Movimiento de Robots Manipuladores”, Ed. Prentice Hall, 2003.
- [17] Vite Medécigo S., Tesis para obtener el título de ingeniería en electrónica y telecomunicaciones “*Diseño e integración de una plataforma experimental para evaluación de algoritmos de control de robots*”. Pachuca, Hgo., Diciembre, 2005.
- [18] Choudhury S., Thornhills N.F., and Shah S.L. *A data driven-model for valve stiction*. ADCHEM, Hong Kong, Enero, 2003.
- [19] <http://usuarios.lycos.es/pefeco/mas/mas1.htm>
- [20] Tjahjowidodo T., Al-Bender F., Van Brussel H. and Symens B., *Friction characterization and compensation in electro-mechanical systems*. Science Direct, Journal of Sound and Vibration, Marzo, 2007.
- [21] Díaz Montiel M. Tesis de M. en C. “*Convergencia en Tiempo Finito de Robots Manipuladores con Tareas de Seguimiento*” Pachuca, Hidalgo, Enero, 2007.
- [22] www.elo.utfsm.cl/.../images/exponenciales45.gif
- [23] www.uantof.cl/.../exponencial/expone9.gif